ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-QUATRIÈME — ANNÉE 1947

(83e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1947

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΔΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΙΕΠΙΜΕΤΡΕ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-QUATRIÈME — ANNÉE 1947

(83e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1947

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-QUATRIÈME.

Pages.

Configurations harmoniques et quaternions, par M. *Gaston Benneton* 1

Théorie de Galois pour les corps non commutatifs, par M. *Henri Cartan* 59

Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts, par MM. *Henri Cartan* et *Roger Godement* 79

Sur les produits tensoriels, par M. *Jean Dieudonné* 101

Théorèmes taubériens et théorie spectrale, par M. *Roger Godement* 119

Sur le comportement asymptotique des zéros de certaines fonctions d'approximation, par M. *Shafik Doss* 139

Sur les fonctions continues monotones, par M. *Chi-Taï Chuang* 179

Questions de Géométrie liées au caractère invariant de certains réseaux par déformation arbitraire de leur surface support, par M. *Paul Vincensini* 197

Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements, par M. *Marcel Decuyper* 227

Recherches sur le flambement des poutres droites à section constante et à moment d'inertie variable, par M. *Florin Vasilesco* 247

Sur les fonctions à variation bornée d'ordre supérieur, par M. *Akos Császár* 275

Sur la synchronisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté, par M. *Jules Haag* 285

Algèbre des relations de congruence, par M. *Albert Châtelet* 339

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONFIGURATIONS HARMONIQUES
ET
QUATERNIONS

PAR M. GASTON BENNETON.

INTRODUCTION.

Le présent Travail est l'exposé synthétique d'une théorie des *configurations harmoniques* dans l'espace à trois dimensions. Nous appelons ainsi les configurations de points et de plans autopolaires par rapport à une quadrique proprement dite. Cette famille géométrique très particulière comprend néanmoins les configurations le plus anciennement connues et les plus remarquables.

Dans une première Partie, nous montrons que la notion de quaternion donne un excellent procédé pour représenter les configurations harmoniques et pour rechercher les groupes d'homographies et de corrélations qui leur sont attachés. De la sorte, nous ramenons l'étude des propriétés projectives de ces figures à des questions purement algébriques et plus spécialement *arithmétiques* de la théorie des quaternions.

Une deuxième Partie est consacrée aux configurations remarquables, notamment celles, de nature tétraédrique, qu'on peut qualifier de *régulières* : les tétraèdres de Möbius, les tétraèdres desmiques, la configuration de Kummer, la configuration de Klein, et quelques autres obtenues par combinaisons des précédentes. Nous définissons toutes ces configurations au moyen de leurs

propriétés géométriques usuelles: nous les réduisons à leur forme canonique par un choix convenable du tétraèdre de référence. Nous déterminons ensuite le groupe des transformations linéaires conservant globalement chaque configuration et sa quadrique directrice, puis nous rappelons quelques-unes des propriétés de la figure en une étude sommaire dépouillée de tout appareil analytique. Le mode de raisonnement adopté rappelle, par son caractère intrinsèque et ses notations condensées, les procédés classiques de la Géométrie vectorielle.

Ce Travail, qui renouvelle entièrement des questions connues sur les configurations, apporte en même temps des résultats inédits et ouvre la voie à certaines méthodes d'investigation. Nous souhaitons qu'il serve de point de départ à d'utiles recherches.

PREMIÈRE PARTIE.

Opérations géométriques.

1. *Configurations de points et de plans.* — Un ensemble de points et de plans forme une *configuration* si par chaque point passe un même nombre de plans, et si dans chaque plan se trouve un même nombre de points. Les points et les plans sont aussi appelés *sommets* et *faces* de la configuration.

Nous considérons uniquement les figures comportant un nombre égal de points et de plans : *une configuration, représentée par le symbole (ou type) n_p est un ensemble de n points et de n plans tels que chaque plan contienne p points et que, par chaque point, passent p plans de l'ensemble.*

La figure la plus simple, relative à $n = 1$, est constituée par un point et un plan : nous la nommons *élément*. C'est une configuration 1_0 si le point est hors du plan, et une configuration 1_1 si le point est dans le plan. Deux éléments sont *en incidence* ou *unis* s'ils sont inscrits l'un dans l'autre, le plan de l'un passant par le point de l'autre, et inversement. On peut donc dire que tout élément 1_1 est en incidence avec lui-même.

Dans une configuration donnée, permutons les points entre eux, et les plans entre eux. Parmi toutes les permutations possibles, celles qui conservent la propriété d'incidence des éléments correspondants forment un groupe fini que l'on appelle *groupe des permutations* de la configuration [18]. On dit que deux points jouent un rôle *symétrique* dans la figure, ou encore qu'ils sont *similaires*, si l'un d'eux se substitue à l'autre (¹) dans au moins une permutation du groupe. On définit de même les plans similaires. Une configuration est dite

(¹) Il n'y a pas nécessairement échange des deux points.

régulière si tous ses points jouent un rôle symétrique, en même temps que tous ses plans : les points sont similaires et les plans sont similaires.

Deux configurations sont dites *semblables* (ou équivalentes), si elles sont de même type n_p et si, en outre, on peut établir entre elles une correspondance biunivoque de point à point et de plan à plan, de telle manière qu'à tout élément auto-incident 1_i de l'une corresponde un élément auto-incident de l'autre. Les points et les plans vérifient alors les mêmes relations de coplanéité ou d'incidence dans les deux configurations. Un exemple simple est celui de configurations déduites l'une de l'autre par transformation homographique. Notons qu'une configuration régulière est semblable à elle-même de plusieurs manières.

Deux configurations n_p sont *réciproques* s'il existe entre elles une correspondance biunivoque de point à plan, telle qu'à tout élément auto-incident de l'une corresponde un élément auto-incident de l'autre : à des points coplanaires correspondent des plans concourants, et inversement. Les configurations qui se transforment l'une en l'autre par polarité par rapport à une quadrique, ou par rapport à un complexe linéaire, sont évidemment réciproques.

Au cours de ce travail, dès maintenant, *toutes les configurations étudiées seront supposées réciproques à elles-mêmes*. En voici une nouvelle définition que rend plus concise la notion d'élément : *Une configuration n_p, réciproque à elle-même, comprend n éléments distincts dont chacun est en incidence avec p éléments de l'ensemble.*

Par polarité par rapport à une quadrique ou un complexe linéaire, une telle configuration se transforme en une configuration semblable. Pour qu'elle soit régulière, il suffit que tous ses points soient similaires, car il en est alors de même de tous ses plans. Observons toutefois que deux éléments formés par deux points similaires et les plans correspondants (par réciprocité) ne jouent pas nécessairement un rôle symétrique dans la configuration.

2. *Diagrammes d'incidence.* — Précisons sur un exemple le sens des définitions précédentes et la nature de quelques problèmes qui se présentent pareillement pour toutes les configurations.

Considérons le cas de la configuration 4_2. Nommons ses éléments A, B, C, D et représentons les incidences mutuelles par le tableau rectangulaire

$$\begin{matrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{matrix}$$

où nous convenons d'écrire les éléments en incidence dans la même ligne ou la même colonne : A et D sont en incidence avec B et avec C. Ce tableau constitue le *diagramme d'incidence*. Les éléments, et par suite les points, jouent un rôle symétrique puisqu'on peut échanger deux termes quelconques du diagramme (à condition d'échanger les deux autres). La configuration est donc régulière.

Elle est réalisée géométriquement par quatre plans formant tétraèdre, deux points sur une arête et deux autres points sur l'arête opposée.

La même configuration peut être aussi envisagée comme un système de quatre éléments auto-incidents 1_1 formant deux configurations 2_2 distinctes

$$\underline{A'}\ \ B'$$
$$\underline{C'}\ \ \underline{D'}$$

les lettres soulignées désignant des éléments en incidence avec eux-mêmes.

Il existe encore une autre figure du type 4_2, constituée par quatre plans formant tétraèdre et quatre points répartis sur deux couples d'arêtes opposées : son diagramme s'écrit

$$\underline{A}\ \ B$$
$$C\ \ \underline{D}.$$

Le rôle des quatre éléments n'est plus symétrique, puisqu'il est impossible de permuter A et B. Mais cet ensemble représente néanmoins une configuration régulière, car les points sont similaires : on peut échanger les points A et B en permutant les points C et D entre eux, les plans B et C entre eux.

Les cas particuliers que nous venons d'examiner appellent une remarque importante concernant les diagrammes d'incidence en général : une configuration donnée peut admettre plusieurs diagrammes de formes différentes, selon la manière dont on associe les points et les plans qui composent ses éléments; mais inversement, si l'on se donne *a priori* un diagramme d'incidence, il n'existe pas obligatoirement de configuration correspondante réalisable géométriquement.

Étudions par exemple s'il existe des configurations, nécessairement régulières, qui possèdent un *diagramme linéaire*. Nous obtenons deux catégories :

les configurations n_n, ensembles de n points en ligne droite et de n plans concourants suivant cette droite

$$\underline{A}\ \ \underline{B}\ \ \underline{C}\ \ \ldots\ \ \underline{L};$$

les configurations n_{n-1}, qui n'existent que si n est inférieur ou au plus égal à 4 : configuration 2_1 formant un dièdre avec deux points sur l'arête, configuration 3_2 formant un trièdre avec un point sur chaque arête, configuration 4_3 formant un tétraèdre

$$A\ \ B\ \ C\ \ D;$$

les trois premiers plans ne peuvent concourir suivant une même droite (celle-ci passerait alors par tous les points), et leur unique point commun détermine le quatrième et dernier sommet possible.

3. *Procédés de construction.* — A partir de configurations connues, par exemple celles dont le diagramme est linéaire, on peut obtenir de nouvelles

configurations au moyen d'opérations plus ou moins complexes. Voici quelques procédés usuels :

1° *Addition* de plusieurs configurations semblables. Nous réunissons k configurations n_p dont les diagrammes d'incidence (ou à défaut les diverses relations d'incidence) sont identiques. Si les éléments sont tous distincts, la somme obtenue est une configuration du type

$$kn_p.$$

Elle est régulière, s'il en est de même des k configurations composantes.

Par exemple, l'addition de deux configurations 4_2 à diagrammes rectangulaires donne une configuration 8_2 régulière de la forme

$$\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A' & B' \\ C' & D'. \end{array}$$

2° *Soustraction* ou *réduction* d'une configuration par suppression de certains de ses éléments. Si le diagramme est linéaire, on peut en ôter des éléments quelconques. Si le diagramme est rectangulaire, on peut enlever plusieurs lignes ou colonnes. S'il est carré, on peut enlever les éléments d'une diagonale ou de plusieurs lignes (brisées) parallèles à cette diagonale. C'est ainsi, par exemple, que la configuration 16_6 à diagramme carré donne naissance aux configurations 12_3, 12_4, 8_4, 8_2, etc.

Des opérations analogues sont possibles dans un diagramme parallélépipédique ou cubique, par suppression de termes parallèlement aux bases ou aux plans diagonaux du diagramme.

3° *Duplication* d'une configuration par adjonction d'une nouvelle configuration inscrite à la première. Étant donnée une configuration n_p, transformons ses éléments par polarité par rapport à un complexe linéaire quelconque. Nous obtenons une nouvelle configuration n'ayant, en général, aucun point ou plan commun avec la première et du même type n_p puisque la transformation conserve la propriété d'incidence. En outre, puisque deux éléments quelconques conjugués par rapport au complexe sont en incidence, les deux configurations sont mutuellement *inscrites et circonscrites :* tout point de l'une est situé dans un plan de l'autre, et inversement. La figure totale constitue donc une configuration du type

$$2n_{p+1}.$$

Elle est régulière s'il en est de même de la configuration initiale.

Considérons par exemple un tétraèdre ABCD et le tétraèdre A'B'C'D' obtenu par polarité. L'ensemble est une configuration 8_4 représentable par

le diagramme rectangulaire

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D'. \end{matrix}$$

C'est un couple de tétraèdres inscrits l'un dans l'autre ou *tétraèdres de Möbius*.

On peut répéter la même transformation polaire en utilisant un nouveau complexe linéaire. La configuration 8_4 donne naissance à une configuration 16_8 représentable par un diagramme parallélépipèdique dont les bases

$$\begin{matrix} A & B & C & D & | & A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A' & B' & C' & D' & | & A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \end{matrix}$$

ont leurs éléments en incidence deux à deux. De même on obtient les configurations 32_{16}, 64_{32} correspondant à des diagrammes parallélépipédiques à quatre ou cinq dimensions. Et ainsi de suite.

4° *Multiplication* d'une configuration au moyen de plusieurs configurations mutuellement inscrites. Ce procédé, extension du précédent, utilise un système de k complexes linéaires choisis de telle sorte que, par polarité, les k transformés d'un élément quelconque de la configuration initiale soient en incidence mutuelle : les transformés A', A'', ... de A sont en incidence, de même que les transformés B', B'', ..., de B, etc.

$$\begin{matrix} A & B & C & \dots \\ A' & B' & C' & \dots \\ A'' & B'' & C'' & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

On montre aisément que le nombre k ne dépasse pas 3. La structure des deux ou trois complexes utilisés dépend directement de la configuration initiale n_p qui, de ce fait, ne peut être prise absolument quelconque. Les n éléments, joints à tous leurs transformés, constituent trois ou quatre configurations n_p mutuellement inscrites et circonscrites dont la somme est une configuration du type

$$3n_{p-2} \qquad \text{ou} \qquad 4n_{p-3}.$$

Ce mode de multiplication est applicable à toute une famille de configurations que nous allons définir : les configurations *harmoniques*. Nous y trouverons notamment les systèmes de quatre tétraèdres mutuellement inscrits, configurations 16_6 à diagramme carré ou *configurations de Kummer*.

4. *Configurations harmoniques et quaternions.* — Dans toute configuration réciproque à elle-même il existe par définition une correspondance biunivoque de point à plan conservant la propriété d'incidence des éléments. L'exemple le plus simple d'une telle correspondance est la transformation polaire par rapport à une quadrique proprement dite. La configuration se transforme alors

globalement en elle-même par polarité : elle est *autopolaire par rapport à la quadrique*. Nous dirons, par abréviation, qu'elle est *harmonique*.

L'étude devient plus aisée, puisque la connaissance des points entraîne celle des plans, et inversement. Prenons, dans l'espace à trois dimensions, un système de coordonnées homogènes définissant la quadrique directrice ou *quadrique de base* par son équation canonique sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0. \tag{2}$$

Les éléments, points et plans, sont ainsi rapportés à un tétraèdre (¹) de référence $\mathfrak{T}$ conjugué par rapport à la quadrique $\mathfrak{Q}$. A tout point de la configuration correspond le plan polaire ayant les mêmes coordonnées (ou paramètres directeurs), et inversement.

La notion de *quaternion* fournit un procédé extrêmement commode pour rechercher et étudier les configurations harmoniques :

Étant donné un point ou un plan A, dont les coordonnées (réelles ou imaginaires) par rapport à $\mathfrak{T}$ sont x_0, y_0, z_0, t_0, nous lui associons le quaternion

$$\mathrm{A} = x_0 + y_0 i + z_0 j + t_0 k,$$

défini à partir des quaternions unités 1, i, j, k. Nous désignons par la *même lettre* le quaternion, le point, le plan et l'élément correspondants : l'élément A comprend donc le point A et son plan polaire par rapport à la quadrique de base. Cette notation, qui sera employée systématiquement, permet de définir la somme et le produit de deux points (ou plans, ou éléments) par l'addition et la multiplication des quaternions correspondants. Notons que les points A et mA ne sont pas distincts lorsque m est un scalaire différent de zéro; pour cette raison, les quaternions seront généralement déterminés à un coefficient près et dépendront de trois paramètres seulement.

Les quatre points 1, i, j, k et les plans de même nom sont les sommets et les faces du tétraèdre de référence

$$1 \quad i \quad j \quad k. \tag{$\mathfrak{T}$}$$

Nous désignerons habituellement par J un élément quelconque de ce tétraèdre, ou encore l'un des quaternions unités, et par I une unité quelconque autre que 1 :

$$\mathrm{J} = 1, i, j, k; \qquad \mathrm{I} = i, j, k.$$

Pour qu'un point A de coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 soit situé dans un plan B de coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1, ou inversement, il faut et il suffit que

$$x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1 + t_0 t_1 = 0,$$

(¹) Dont les sommets seront, le plus souvent, quatre points convenablement choisis de la configuration.

relation bilinéaire qui exprime aussi que les points A et B sont conjugués par rapport à la quadrique de base. La condition d'incidence de deux éléments A et B équivaut donc à l'*orthogonalité* des quaternions correspondants, c'est-à-dire

$$\text{p.scalaire}\quad A\overline{B} = 0,$$

égalité signifiant que le produit d'un quaternion par le conjugué de l'autre a une partie scalaire nulle.

Le cas le plus intéressant est celui des quaternions orthogonaux de norme non nulle. L'expression générale des éléments B en incidence avec A s'écrit alors

$$B = AV, \qquad V = \lambda i + \mu j + \nu k.$$

Le quaternion B est le produit de A à droite (ou à gauche) par un *vecteur* V quelconque, quaternion ayant une partie scalaire nulle.

Si la norme du quaternion A est nulle, l'élément correspondant A, en incidence avec lui-même, est formé par un plan tangent à la quadrique de base et son point de contact. Tout autre élément B, en incidence avec lui-même et avec A, est de la forme

$$B = AQ \text{ ou } QA, \qquad N(A) = N(B) = 0,$$

Q désignant un quaternion quelconque. La multiplication de A par Q se fait à droite ou à gauche suivant que le point B se trouve sur l'une ou l'autre des deux génératrices de la quadrique qui passent par le point A.

Les considérations précédentes s'étendent à un nombre quelconque d'éléments. Nous pouvons donc énoncer ce principe général sur lequel nous baserons tout notre raisonnement à venir :

La recherche d'une configuration harmonique n_p équivaut à celle d'un tableau de n quaternions dont chacun est orthogonal à p quaternions du tableau (¹).

Remarque. — Une méthode analogue serait applicable aux configurations autopolaires par rapport à un complexe linéaire.

Considérons par exemple le complexe obtenu en égalant deux coordonnées plückériennes

$$p_3 - p_6 = 0,$$

qui est l'un des six complexes de référence de la géométrie de Klein. Une droite du complexe joignant les points de coordonnées x, y, z, t et x', y', z', t' vérifie

$$zt' - z't - xy' + x'y = 0.$$

Au point A de coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 correspond donc le plan polaire de paramètres directeurs $-y_0, x_0, t_0, -z_0$.

(¹) Il peut se faire que le quaternion soit orthogonal à $p - 1$ autres et à lui-même.

Dans le langage des quaternions, nous pouvons dire que le point A a pour plan polaire Ai, formant un élément en incidence avec lui-même. Pour que les éléments relatifs à deux points A et B soient en incidence mutuelle, il faut que le point A soit situé dans le plan Bi, c'est-à-dire

$$\text{p.scalaire } \overline{A}Bi = 0;$$

la deuxième composante du produit $\overline{A}B$ doit être nulle.

5. *Multiplication des configurations harmoniques.* — Deux points A_1 et A_2 conjugués par rapport à la quadrique de base constituent avec leurs plans polaires deux éléments A_1 et A_2 en incidence mutuelle. Si nous multiplions les quaternions correspondants, à droite par exemple, par un même quaternion B, nous obtenons deux nouveaux éléments A_1B et A_2B qui sont aussi en incidence, puisque

$$\text{p.scalaire } A_1B.\overline{A_2B} = N(B) \quad \text{p.scalaire } A_1\overline{A_2}.$$

Au reste, ces éléments résultent des premiers par la transformation homographique définie par le multiplicateur B.

Considérons alors deux configurations autopolaires par rapport à une même quadrique choisie comme quadrique de base

$$\begin{aligned} &A_\alpha, \quad \text{configuration } m_p, && (\alpha = 1, 2, \ldots, m);\\ &B_\beta, \quad \text{configuration } n_q, && (\beta = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Multiplions les quaternions correspondants de la première par ceux de la deuxième : nous obtenons un ensemble de mn éléments $A_\alpha B_\beta$, que nous supposons distincts. Dans la première configuration l'élément A_α est en incidence avec p éléments A_γ, et dans la deuxième, B_β est en incidence avec q éléments B_δ. Il s'ensuit que l'élément $A_\alpha B_\beta$ est en incidence avec les $p+q$ éléments $A_\gamma B_\beta$ et $A_\alpha B_\delta$. S'il n'y a pas d'incidences particulières en dehors des précédentes, l'ensemble des mn éléments forme donc une configuration harmonique du type

$$A_\alpha B_\beta. \quad \text{configuration } mn_{p+q}.$$

Nous l'appelons *produit à droite* de la configuration A_α par la configuration B_β. C'est aussi la somme des n configurations semblables

$$A_\alpha B_1, \quad A_\alpha B_2, \quad \ldots \quad A_\alpha B_n.$$

Le produit à gauche $B_\beta A_\alpha$ est une configuration semblable à $A_\alpha B_\beta$, sous la même réserve qu'il n'existe pas de coïncidences ou d'incidences particulières.

Ainsi, *étant données deux configurations m_p et n_q autopolaires par rapport à une même quadrique, il est généralement possible d'en déduire une nouvelle configuration harmonique correspondant à la multiplication du nombre des éléments mn et à l'addition du nombre des incidences $p+q$.*

Cette multiplication s'étend naturellement à un nombre quelconque de configurations autopolaires par rapport à une même quadrique; comme pour les quaternions, l'opération est associative. Notons que *le produit est une configuration régulière s'il en est de même des facteurs.*

En particulier, prenons comme multiplicateur une configuration harmonique simple 2_1, 3_2 ou 4_3 comprenant tout ou partie du tétraèdre

$$1 \quad V \quad V' \quad V''.$$

où les trois vecteurs V sont mutuellement orthogonaux. Le produit d'une configuration harmonique n_p par ce multiplicateur est, suivant le cas, une configuration du type

$$2n_{p+1}, \quad 3n_{p+2}, \quad 4n_{p+3}.$$

Cette opération équivaut à l'addition de deux, trois ou quatre configurations semblables, mutuellement inscrites et circonscrites; elle correspond à l'un des procédés de construction du numéro 3.

Remarque. — Nous avons supposé que les mn éléments $A_\alpha B_\beta$ étaient tous distincts et que chacun d'eux admettait au plus $p+q$ incidences. Dans l'hypothèse contraire, une étude directe est nécessaire. Toutefois, si l'on désire se ramener au cas normal, on peut substituer à la configuration A_α une configuration semblable $A_\alpha P$ convenablement choisie : pour que les éléments de la configuration résultante $A_\alpha PB_\beta$ soient distincts et ne présentent pas d'incidences particulières, il suffit que le point P ne soit pas situé sur certaines lignes ou surfaces simples (plans et quadriques) en nombre fini, qui dépendent des configurations données.

6. *Transformations linéaires.* — 1° Multiplions une configuration harmonique A_α à gauche par un élément P, à droite par un élément Q. Nous obtenons une configuration harmonique $PA_\alpha Q$ semblable à la première, dont elle résulte par transformation homographique.

Inversement, recherchons les transformations linéaires qui font correspondre à *toute* configuration autopolaire par rapport à une quadrique donnée (quadrique de base), une configuration semblable autopolaire par rapport à la même quadrique.

Désignons l'élément courant par

$$\xi = x + yi + zj + tk$$

et représentons la quadrique par son équation réduite (ponctuelle et tangentielle)

$$N(\xi) = 0.$$

Les transformations cherchées *conservent la propriété d'incidence* de deux éléments quelconques. En particulier, tout élément en incidence avec lui-même

est tangent à la quadrique de base et se transforme en un élément tangent : la quadrique de base se transforme globalement en elle-même, ponctuellement et tangentiellement. Les transformations se présentent donc comme des substitutions linéaires conservant la norme à un coefficient près (1), c'est-à-dire des *substitutions orthogonales* d'ordre 4. Elles se traduisent [28] par la multiplication du quaternion ξ ou de son conjugué, à gauche et à droite, par deux quaternions P et Q de *norme non nulle* (2)

$$P\xi Q \qquad \text{ou} \qquad P\bar{\xi}Q.$$

L'incidence de deux éléments A et B est bien conservée puisque

$$\text{p.scalaire}\,(PAQ.\overline{PBQ}) = N(P)\,N(Q)\,\text{p.scalaire}\,A\overline{B}.$$

Et la transformée d'une configuration harmonique est une configuration harmonique semblable.

Les précédentes transformations linéaires, puisqu'elles s'effectuent sur des éléments, peuvent être considérées à volonté comme des homographies ou des corrélations. Pour l'instant nous examinerons le seul cas des *homographies*.

2° Nous venons d'établir que les homographies conservant la quadrique de base constituent un groupe à six paramètres comprenant lui-même deux séries de transformations :

La première série est le groupe des *transformations propres* $P\xi Q$, homographies de type général, avec quatre points doubles situés sur la quadrique. En considérant deux points d'une même génératrice et leurs transformés (n° 4)

$$(A,\ AQ), \qquad (PAQ,\ PA), \qquad N(A) = 0,$$

nous voyons que les transformations conservent globalement chaque système de génératrices de la quadrique de base, à condition toutefois qu'aucun des quaternions P ou Q ne se réduise à un scalaire.

Si l'un des quaternions P ou Q est scalaire, les transformations se réduisent à

$$P\xi, \quad \xi Q$$

et déterminent des sous-groupes du groupe propre. Ainsi, *le groupe propre* $P\xi Q$ *contient deux sous-groupes à trois paramètres, conservant chacun les génératrices d'un même système*. Deux transformations $P\xi$ et ξQ appartenant respectivement aux deux sous-groupes sont permutables [20].

La seconde série, qui ne forme pas un groupe, comprend les transformations *impropres* $P\bar{\xi}Q$. Celles-ci permutent entre eux les deux systèmes

(1) Transformations d'Hermite particulières.

(2) Norme que nous pouvons supposer égale à un.

de génératrices

$$(A, AP), \quad (PAQ, AQ), \qquad N(A) = 0,$$

quels que soient les quaternions P et Q.

3° Parmi toutes ces transformations, retenons particulièrement les homographies *involutives :* elles sont caractérisées par des quaternions P et Q qui ont leurs carrés scalaires, ou qui sont égaux, suivant que la transformation est propre ou impropre. Elles correspondent donc à l'une des formules

$$U\xi V, \quad U\xi, \quad \xi V, \quad P\xi P,$$

U et V étant des vecteurs, P un quaternion.

La transformation $U\xi V$ représente une *homographie involutive biaxiale* dont les axes (ou directrices) sont deux droites conjuguées par rapport à la quadrique de base.

La transformation $U\xi$ ou ξU est aussi biaxiale, mais ses axes sont deux génératrices d'un même système de la quadrique de base, génératrices passant respectivement par les points

$$U + \varepsilon, \quad U - \varepsilon,$$

où ε désigne un scalaire imaginaire dont le carré vaut -1. Un point quelconque et son transformé sont conjugués harmoniques par rapport à la quadrique. Pour cette raison, nous dirons que l'homographie est *biaxiale harmonique* (par rapport à la quadrique de base). Cette propriété de conjugaison, jointe à l'invariance de la quadrique, est d'ailleurs caractéristique puisque toute homographie $P\xi Q$ pour laquelle l'égalité

$$\text{p.scalaire} \quad P\xi Q\bar{\xi} = 0$$

est vérifiée identiquement, quel que soit ξ, a nécessairement la forme $U\xi$ ou ξU.

La transformation $P\xi P$ est une homographie centrale involutive ou *homologie involutive*. L'élément P constitue le centre et le plan de l'homologie, qui sont polaires réciproques par rapport à la quadrique.

Signalons en terminant ce résultat immédiat sur la décomposition d'une transformation d'Hermite en un produit d'homographies particulières : *Toute transformation propre* $P\xi Q$ *peut être considérée, d'une infinité de manières, comme le produit de deux homographies involutives biaxiales, et aussi comme le produit de quatre homographies biaxiales harmoniques permutables deux à deux.* En effet, tout quaternion P ou Q équivaut au produit de deux vecteurs. Dans le même ordre d'idées, *toute transformation impropre est le produit d'une transformation propre par une homologie involutive particulière,* $\bar{\xi}$ par exemple.

7. *Quelques groupes finis de transformations.* — Une famille de transformations homographiques qui laisse invariante une quadrique donnée et conserve

globalement une configuration autopolaire par rapport à cette quadrique, constitue en général un *groupe fini* de transformations.

1° Le cas le plus simple est celui des homographies qui conservent en même temps la quadrique de base et le tétraèdre de référence $1, i, j, k$. D'abord, elles s'écrivent $P\xi Q$ ou $P\xi\overline{Q}$. Puisque l'élément 1 se transforme en élément J, unité quelconque, les quaternions P et $\overline{Q}$ sont *associés à droite* (1)

$$Q = JP.$$

Pour que les éléments i, j, k se transforment en trois nouvelles unités, il faut en outre que les quaternions P et Q soient eux-mêmes unités ou sommes de deux ou quatre unités

$$J,\quad J = J',\quad 1 = i = j = k,$$

c'est-à-dire des quaternions *entiers* de norme 1, 2 ou 4. Désignons globalement de tels quaternions par la lettre K. Ils ont pour propriété essentielle d'être *permutables avec le facteur unité*, de sorte que

$$KJ = J'K.$$

En définitive, les homographies cherchées constituent un *groupe fini* G_{192} ayant pour formule

$$K\xi K J,\quad K\overline{\xi} K J,$$

dont les 192 opérations correspondent aux permutations et changements de signe des coordonnées, de toutes les manières possibles.

Si nous effectuons les changements de signe des coordonnées uniquement sur deux d'entre elles ou sur aucune, nous obtenons un sous-groupe G_{96}, moitié du précédent, qui comprend les seules transformations propres $K\xi KJ$.

Inversement, le groupe des 192 homographies peut être inclus dans un groupe fini six fois plus nombreux G_{1152} représenté par

$$K\xi K',\quad K\overline{\xi} K',$$

où K et K′ désignent tous les quaternions entiers de norme 1, 2 ou 4, associés ou non [22]. Les 576 (2) transformations propres qu'il contient forment un nouveau groupe décomposable en produit de deux sous-groupes d'ordre 24

$$K\xi,\quad \xi K$$

que nous appelons *groupes desmiques* G'_{24} et G''_{24}.

(1) Certains auteurs les appellent associés *à gauche*. Chaque quaternion est le produit de l'autre par une unité à gauche. Si les quaternions sont entiers (à composantes réelles entières), chacun d'eux est diviseur à droite de l'autre.

(2) Ou 24^2.

2° Parmi les transformations précédentes liées au tétraèdre de référence se trouvent notamment les seize homographies propres *involutives*

$$J\xi J'$$

constituant le *groupe fondamental* G_{16}. Celui-ci comprend la transformation identique ξ, six homographies biaxiales harmoniques $I\xi$ et ξI, trois homographies biaxiales $I\xi I$ ayant pour axes deux arêtes opposées du tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$, enfin six homographies biaxiales dont les axes coupent chacun deux arêtes opposées de $\mathfrak{T}$.

Le groupe fondamental G_{16} équivaut au produit de deux sous-groupes $J\xi$ et ξJ d'ordre 4, eux-mêmes produits de sous-groupes d'ordre 2

$$(\xi, i\xi)(\xi, j\xi), \quad (\xi, \xi i)(\xi, \xi j).$$

Il s'obtient aussi par multiplications successives et répétées de quatre transformations convenablement choisies, telles que

$$i\xi, \quad j\xi, \quad \xi i, \quad \xi j.$$

Il existe encore un *second groupe fondamental* G_8 comprenant quatre homographies biaxiales et quatre homologies

$$J\xi J, \quad J\xi J$$

et transformant en lui-même chaque sommet du tétraèdre $\mathfrak{T}$. Ce groupe peut s'obtenir par multiplication et répétition des trois transformations $i\xi i$, $j\xi j$, ξ.

3° D'une manière générale, considérons une transformation propre $P\xi Q$ conservant la quadrique de base et transformant en elle-même une configuration n_p autopolaire par rapport à cette quadrique. Au sommet A_1 de la configuration, non confondu avec un point double de l'homographie, elle substitue par exemple le sommet A_2; au sommet A_2 elle substitue le sommet A_3, et ainsi de suite jusqu'au sommet A_m, premier point tel, qu'elle remplace par le point initial A_1. Le point A_1 est un point double de l'homographie $P^m\xi Q^m$ puisque

$$P^m A_1 Q^m = A_1$$

à un coefficient scalaire près.

Examinons spécialement le cas où la dernière égalité est vérifiée, non seulement pour A_1, mais pour un point quelconque de l'espace : la puissance $m^{\text{ième}}$ de la transformation $P\xi Q$ se réduit alors à la transformation identique et, pour cela, il faut et il suffit que les quaternions P^m et Q^m soient scalaires. Supposons les normes égales à un et écrivons les quaternions sous la forme

$$P = \cos\theta + U\sin\theta, \qquad Q = \cos\theta' + V\sin\theta',$$
$$P^m = \cos m\theta + U\sin m\theta, \qquad Q^m = \cos m\theta' + V\sin m\theta',$$

U et V désignant eux-mêmes des vecteurs de norme un. Les sinus de $m\theta$ et $m\theta'$

doivent être nuls, ce qui donne la condition relative aux seules parties scalaires

$$\text{p.scalaire } P = \cos\frac{k\pi}{m}, \qquad \text{p.scalaire } Q = \cos\frac{k'\pi}{m},$$

k et k' désignant deux entiers positifs inférieurs à m, dont un au moins est premier avec m. Les puissances successives de l'homographie $P\xi Q$ constituent alors une *suite périodique* (¹)

$$\xi, \quad P\xi Q, \quad P^2\xi Q^2, \quad \ldots, \quad P^{m-1}\xi Q^{m-1}, \quad \xi, \quad \ldots.$$

En appliquant au point A_1 toutes les transformations de cette suite, on obtient un système de m points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_m,$$

qu'on appelle *groupement cyclique fini* d'ordre m. *Les points de ce cycle appartiennent à une même quadrique* définie paramétriquement par la formule

$$(U + \lambda)A_1(V + \mu),$$

dont chaque système de génératrices correspond à une valeur constante de l'un des paramètres λ ou μ. Bien entendu cette quadrique reste invariante dans la transformation $P\xi Q$.

Pareillement, les homographies impropres $P\xi Q$ définissent une périodicité d'ordre pair $2m$

$$(PQ)^m\xi(\overline{P}\overline{Q})^m = \xi$$

si les quaternions P et Q, supposés de norme un, satisfont à l'égalité

$$\text{p.scalaire } PQ = \cos\frac{k\pi}{m}.$$

Le groupement cyclique d'ordre $2m$ engendré par les puissances d'une telle homographie se sépare en deux groupements d'ordre m, comprenant respectivement les points de rang pair et ceux de rang impair

$$(A_1, A_3, \ldots, A_{2m-1}), \quad (A_2, A_4, \ldots, A_{2m}).$$

Ces groupements se transforment l'un dans l'autre par l'homographie $P\xi Q$ ou l'une de ses puissances impaires. Chacun d'eux est inscriptible dans une quadrique invariante dans la transformation $PQ\xi\overline{P}\overline{Q}$, carré de l'homographie précédente.

8. *Homographies permutables.* — Deux transformations propres $P\xi Q$ et $P'\xi'Q'$ ayant pour produit

$$P'P\xi QQ'$$

(¹) Si m est pair, la puissance $\frac{m}{2}^{\text{ième}}$ de la transformation est involutive.

ne sont pas permutables en général. Pour qu'elles le soient, il faut et il suffit que les quaternions correspondants aient un produit commutatif, c'est-à-dire, les normes étant différentes de zéro, que

$$P'P = \pm PP', \qquad QQ' = \pm Q'Q.$$

Plusieurs cas sont possibles : les quaternions P et P′ se réduisent à deux vecteurs orthogonaux, ou bien l'un d'eux est un scalaire, ou bien, s'ils ne sont ni scalaires, ni vecteurs, les deux quaternions ont leurs parties vectorielles proportionnelles (ils peuvent donc être conjugués). De même Q et Q′.

Dans ce dernier cas, qui est le plus général, *les transformations propres permutables avec* $P\xi Q$ *forment un groupe à deux paramètres*

$$(P + \lambda)\xi(Q + \mu).$$

Appliqué à un point donné, ce groupe engendre une double infinité de points situés sur une même quadrique.

Voici les critères de commutativité concernant les homographies involutives propres ou impropres :

Une homographie harmonique $U\xi$ est permutable avec toute homographie ξV; leur produit équivaut à une homographie biaxiale. Deux homographies harmoniques de même espèce, $U\xi$ et $U'\xi$, sont permutables si les vecteurs correspondants sont orthogonaux; leur produit est alors de la même espèce.

Deux homographies biaxiales $U\xi V$ et $U'\xi V'$ sont permutables, et ont pour produit une homographie biaxiale, si les vecteurs correspondants sont respectivement égaux ou orthogonaux.

Une homographie biaxiale $U\xi V$ est permutable avec une homologie involutive $P\overline{\xi}P$ si les quaternions satisfont à la relation

$$UP = mPV \qquad (m \text{ scalaire}).$$

Le point P est alors un point double de l'homologie involutive qui résulte des deux transformations.

Deux homologies involutives $P\overline{\xi}P$ et $Q\overline{\xi}Q$ sont permutables si les quaternions P et Q sont orthogonaux, et réciproquement. Leur produit est une homographie biaxiale admettant les points P et Q comme points doubles.

En particulier, *deux homographies quelconques du groupe fondamental* G_{16} *sont permutables; ainsi que deux homographies du second groupe fondamental* G_8.

La même propriété s'étend d'ailleurs à des systèmes semblables, tels que le groupe d'ordre 16 représenté par

$$PJ\overline{P}\xi\overline{Q}J'Q$$

(J et J′ désignant des unités quelconques) et le groupe d'ordre 8 représenté par

$$PJ\overline{P}\xi\overline{Q}JQ, \quad PJ'Q\overline{\xi}PJ'Q.$$

Ces deux groupes transforment en lui-même le tétraèdre PQ, PiQ, PjQ, PkQ conjugué par rapport à la quadrique de base, et peuvent être considérés comme les *transformés* des groupes fondamentaux G_{16} et G_8 par l'homographie PξQ.

9. *Polarités et quadriques fondamentales.* — 1° Envisageons maintenant les transformations linéaires liées à la quadrique de base comme des *corrélations*. Si elles sont involutives, elles prennent une forme plus concrète et deviennent des *polarités* par rapport à des quadriques et à des complexes linéaires que nous allons déterminer.

La polarité par rapport à un complexe linéaire se reconnaît immédiatement au fait qu'un élément quelconque ξ est en incidence avec son transformé

$$U\xi \quad \text{ou} \quad \xi V,$$

U et V désignant des vecteurs.

Les deux autres formes involutives

$$U\xi V, \quad P\xi P$$

représentent chacune une polarité par rapport à une quadrique déterminée par les vecteurs U, V ou par le quaternion P. Ces quadriques, *que nous désignerons aussi par leur formule polaire* UξV ou PξP, ont pour équations ponctuelles et tangentielles

$$\text{p.scalaire } U\Xi V\Xi = 0, \qquad \text{p.scalaire } P\Xi P\Xi = 0;$$

par rapport à la quadrique de base, elles occupent une position remarquable que nous préciserons bientôt.

Signalons que les précédentes polarités transforment le tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ en tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique de base : elles conservent globalement cette quadrique et la famille de ses tétraèdres conjugués.

Examinons le cas des polarités permutables, dont le produit est commutatif par définition. *Deux complexes linéaires qui ont leurs polarités permutables sont dits en involution* (¹); *nous dirons pareillement que deux quadriques sont en involution si elles déterminent des polarités permutables.*

Les résultats ci-après s'obtiennent immédiatement :

Tout complexe Uξ, faisant partie du réseau linéaire de complexes $i\xi$, $j\xi$, $k\xi$, est en involution avec tout complexe ξV du réseau ξi, ξj, ξk. Deux complexes d'un même réseau, tels que Uξ et U'ξ, sont en involution si les vecteurs U et U' sont orthogonaux, c'est-à-dire si les éléments U et U' sont en incidence.

Deux quadriques UξV et U'ξV' sont en involution si les vecteurs correspondants sont respectivement égaux ou orthogonaux. Deux quadriques UξV

(¹) D'après Klein.

et $P\xi P$ sont en involution si les points UP et PV sont confondus. Enfin deux quadriques $P\xi P$ et $Q\xi Q$ sont en involution si les quaternions P et Q sont orthogonaux. Ce résultat permet d'établir une correspondance entre certaines quadriques en involution et des éléments P, Q en incidence.

En particulier, *toute quadrique* $U\xi V$ *ou* $P\xi P$ *est en involution avec la quadrique de base* ξ.

2° Les polarités qui conservent le tétraèdre de référence présentent une analogie avec les homographies des deux groupes fondamentaux.

Parallèlement au premier groupe fondamental, *les seize polarités* $J\xi J'$ *transforment le tétraèdre* $\mathfrak{T}$ *en lui-même et sont permutables* (1). Elles définissent les complexes et quadriques que voici :

Les *six complexes fondamentaux en involution mutuelle*

$$i\xi, \quad j\xi, \quad k\xi, \quad \xi i, \quad \xi j, \quad \xi k,$$

dont les équations plückériennes s'écrivent

$$p_1 \mp p_4 = 0, \qquad p_2 \mp p_5 = 0, \qquad p_3 \mp p_6 = 0.$$

Ce sont les six complexes de référence de la géométrie réglée de Klein [10, 19, 21].

Les *dix quadriques fondamentales* $J\xi J'$, les unités J et J' étant toutes deux choisies entre i, j, k, ou simultanément égales à 1. Ces quadriques, qui comprennent la quadrique de base, ont pour équations cartésiennes

$$x^2 \mp y^2 \mp z^2 \mp t^2 = 0, \qquad xy \mp zt = 0, \qquad xz \mp yt = 0, \qquad xt \mp yz = 0,$$

où la première équation, relative à $J = J'$, contient un nombre pair de signes moins. Elles sont en involution mutuelle et jouent un rôle parfaitement symétrique (n° 14). Chacune d'elles est conservée par les homographies du groupe fondamental G_{16}.

Parallèlement au second groupe fondamental d'homographies, on peut considérer huit polarités permutables qui définissent un système de *huit quadriques fondamentales* en involution mutuelle $J\xi J$ et $J\xi J$. Leurs équations s'écrivent

$$x^2 \mp y^2 \mp z^2 \mp t^2 = 0.$$

Le tétraèdre de référence est conjugué commun. Chaque quadrique est conservée par les homographies du groupe fondamental G_8.

Les résultats sont analogues pour les systèmes de quadriques $U\xi V$ et $P\xi P$ dont les polarités se déduisent des polarités fondamentales par une transformation homographique propre ou impropre. D'une manière précise, nous

(1) Ces polarités, jointes aux 16 homographies du groupe fondamental G_{16}, constituent un groupe de 32 transformations linéaires, ou *groupe de Kummer*.

montrerons que, par un choix convenable du tétraèdre de coordonnées, un ensemble quelconque de quadriques en involution mutuelle peut se transformer en quadriques fondamentales. Suivant le cas, cet ensemble pourra donc être inclus dans un système involutif de huit ou de dix quadriques.

DEUXIÈME PARTIE.

Figures remarquables.

10. *Vue d'ensemble.* — Les considérations de la Première Partie permettent de construire une classe étendue de configurations harmoniques.

Déjà, au n° 5, nous avons indiqué un procédé de multiplication qui, appliqué à deux configurations harmoniques données, engendre par produits successifs une suite illimitée de configurations de complexité croissante. Nous obtenons de cette manière, à partir du tétraèdre 4_3, des configurations du type

$$8_4, \quad 16_6, \quad 64_9, \quad 128_{10}, \quad \ldots$$

qui représentent respectivement un couple de tétraèdres inscrits l'un dans l'autre ou *tétraèdres de Möbius* [3], un groupe de quatre tétraèdres mutuellement inscrits ou *configuration de Kummer* [7], et des ensembles de *configurations de Kummer mutuellement inscrites*. Ces configurations d'essence tétraédrique sont régulières. Celles de Möbius et de Kummer sont même *homographiquement régulières*, en ce sens que, par une transformation homographique conservant la configuration, on peut remplacer l'un quelconque de ses éléments par un autre arbitrairement choisi; autrement dit, le groupe des permutations de la configuration s'identifie précisément avec un groupe d'homographies.

Au n° 6, dans l'étude des homographies qui laissent invariante la quadrique de base, nous avons vu que toute transformation propre peut être considérée comme le produit de deux homographies biaxiales. Cette propriété est conforme aux résultats généraux de la géométrie de Cayley [26], où un déplacement équivaut au produit de deux retournements, la quadrique de base jouant alors le rôle de quadrique absolue. De ce point de vue, la théorie des configurations harmoniques est comparable à l'étude des figures polyédriques régulières dans l'espace non euclidien de la géométrie de Cayley. Les groupes de transformations liés aux configurations s'apparentent ainsi au groupe des déplacements, au sous-groupe des rotations et, plus particulièrement, à certains sous-groupes rotatifs discontinus (ou finis) conservant les polyèdres réguliers.

Inversement, la donnée de groupes finis de transformations homographiques ou de corrélations, notamment celles qui conservent le tétraèdre de réfé-

rence (n° 7), permet de déduire les principales configurations harmoniques homographiquement régulières. Ainsi le groupe fondamental G_{16} appliqué à un élément quelconque de l'espace (un point quelconque et son plan polaire par rapport à la quadrique de base) engendre une *configuration de Kummer;* le second groupe fondamental G_8 engendre *deux tétraèdres desmiques* [13] et leurs polaires réciproques; le groupe desmique G'_{24} (ou G''_{24}) engendre une *configuration desmique* 24_9; le groupe total d'ordre 192 engendre un système de *douze configurations de Kummer* dont chacune est homologique de quatre autres; le groupe moitié, d'ordre 96, engendre un système de *six configurations de Kummer* dont chacune est homologique de trois autres,

Enfin, si l'on recherche tous les tétraèdres invariants dans les homographies du groupe fondamental G_{16}, on obtient un système remarquable de quinze tétraèdres qui est la *configuration* 60_{15} *de Klein* [10], intimement liée aux configurations desmiques et à la configuration de Kummer.

Nous allons étudier brièvement toutes ces configurations et établir leurs principales relations. Toutefois, pour rendre le raisonnement intuitif et en quelque sorte plus géométrique, nous définirons les configurations *a priori* par des propriétés usuelles. De même, pour matérialiser les homographies involutives liées à ces figures, nous leur substituerons le plus souvent des polarités par rapport à des quadriques associées. Aux groupes fondamentaux d'homographies et de corrélations correspondent ainsi des systèmes remarquables de huit ou dix quadriques en involution mutuelle.

11. *Tétraèdres de référence, tétraèdres conjugués.* — Un tétraèdre quelconque est une configuration 4_3 harmonique : il est *autopolaire* par rapport à une triple infinité de quadriques. Inversement, une quadrique donnée admet une sextuple infinité de tétraèdres autopolaires.

Étudions plus particulièrement les tétraèdres *conjugués*, c'est-à-dire les tétraèdres autopolaires n'ayant aucun sommet sur la quadrique, le plan polaire d'un sommet étant alors la face opposée.

Étant donnée une quadrique proprement dite, prenons l'un de ses tétraèdres conjugués comme tétraèdre de référence

$$(\mathfrak{T}) \qquad\qquad 1 \quad i \quad j \quad k$$

et choisissons le point unitaire des coordonnées de façon que la quadrique soit la quadrique de base ξ. Tout autre tétraèdre conjugué, nanti d'un point unitaire convenable, peut être pris comme tétraèdre de référence attribuant à la quadrique la même forme canonique ξ; il se déduit donc du précédent par substitution linéaire orthogonale des coordonnées, ou multiplication à gauche et à droite par des quaternions P et Q de norme non nulle

$$PQ \quad PiQ \quad PjQ \quad PkQ.$$

Cette expression canonique, écrite dans cet ordre, est manifestement valable *quel que soit l'ordre initial adopté pour les éléments du tétraèdre*. D'ailleurs, en remplaçant P par un associé à gauche PJ, on peut faire en sorte que la formule PQ corresponde précisément au premier élément choisi du tétraèdre. Cela fait, pour que le deuxième élément prenne la forme $Pi Q$, s'il ne la possède déjà, il suffit de multiplier P et Q à droite par $1+i$ ou $1+k$. S'il y a lieu, il suffit alors de multiplier les mêmes quaternions à droite par $1+i$ pour que le troisième élément devienne $Pj Q$.

Rappelons que le tétraèdre précédent, qu'on peut écrire $P\mathfrak{T}Q$, se transforme en lui-même par les homographies propres ou impropres d'un groupe d'ordre 192 qui contient deux sous-groupes involutifs (n° 8), transformés des groupes fondamentaux G_{16} et G_8 par l'homographie $P\xi Q$.

Modifions l'écriture du tétraèdre conjugué $P\mathfrak{T}Q$ en posant $P = A\overline{Q}$ et en donnant ainsi le rôle principal à l'élément PQ devenu A. Nous obtenons

$$A \quad A\overline{Q}iQ \quad A\overline{Q}jQ \quad A\overline{Q}kQ.$$

Les trois derniers éléments sont le produit de A par trois vecteurs mutuellement orthogonaux, ce qui constitue bien l'expression usuelle de la configuration 4_3 harmonique

$$A \quad AV \quad AV' \quad AV''.$$

En particulier, si A se réduit à un scalaire, le tétraèdre possède trois sommets dans le plan 1 et le quatrième au point 1. Il est conjugué par rapport aux quadriques ξ et $\overline{\xi}$; il se déduit du tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ par la transformation $\overline{Q}\xi Q$ (¹).

Ceci démontre que *trois vecteurs orthogonaux quelconques* V, V', V'' *sont décomposables en produits de quaternions conjugués de la forme*

$$V = \overline{Q}iQ, \qquad V' = \overline{Q}jQ. \qquad V'' = \overline{Q}kQ.$$

La norme de ces vecteurs, différente de zéro, peut être supposée égale à un; leurs composantes, exprimées alors en fonctions symétriques de trois paramètres, définissent un tableau de neuf cosinus directeurs où l'on reconnaît les formules classiques d'O. Rodrigues [4].

12. *Tétraèdres autopolaires inscrits.* — Pour qu'un tétraèdre inscrit dans une quadrique soit en outre autopolaire, il faut que chaque sommet soit le point de contact d'une face. Deux couples d'arêtes opposées sont alors des génératrices de la quadrique sur laquelle ils forment un quadrilatère gauche : le tétraèdre est en même temps circonscrit.

(¹) Cette homographie axiale correspond, dans la géométrie de Cayley, à une rotation autour de la droite 1, Q.

Supposons que la quadrique, par un choix convenable des coordonnées soit la quadrique de base Ξ. L'expression générale des tétraèdres autopolaires inscrits dans la quadrique est

$$\begin{matrix} A & AQ \\ PA & PAQ \end{matrix} \qquad N(A) = 0,$$

A désignant un quaternion de norme nulle, P et Q des quaternions quelconques. Puisque les points PA et AQ sont respectivement situés sur les deux génératrices passant par A, ils dépendent chacun d'un seul paramètre; ce qui permet de particulariser les quaternions P et Q et de supposer, par exemple, que deux de leurs composantes sont nulles. Les tétraèdres dépendent bien de quatre paramètres indépendants.

Inversement, à un tétraèdre donné correspond une infinité de quadriques l'admettant comme tétraèdre autopolaire inscrit : elles constituent trois faisceaux linéaires ponctuels (et tangentiels) déterminés par les trois quadrilatères gauches des arêtes du tétraèdre.

Dans les pages suivantes, nous verrons apparaître des ensembles simples de tétraèdres autopolaires inscrits formant des configurations harmoniques. Voici un premier aperçu sur ces figures.

Remarquons d'abord que, si nous nous donnons *a priori* un diagramme d'incidence à deux dimensions et de forme quelconque, il lui correspond sûrement une *configuration autopolaire inscrite* dans une quadrique donnée. Il suffit d'imaginer que les lignes du diagramme représentent autant de génératrices d'un même système de la quadrique, et que les colonnes représentent des génératrices de l'autre système. Par leurs intersections nous obtenons les sommets de la configuration, et aussi les faces par polarité.

Sur la quadrique de base, m génératrices d'un système et n génératrices de l'autre système déterminent ainsi un ensemble de mn éléments de formule

$$P_\alpha A Q_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

constituant une configuration harmonique à diagramme rectangulaire du type

$$mn_{m\cdot n\ 1^2}.$$

Les cas les plus intéressants correspondent aux premières valeurs de m et n au plus égales à 6, notamment les configurations simples

$$4_3,\quad 8_5,\quad 12_7,\quad 16_7,\quad 24_9,\quad 36_{11}.$$

La configuration 4_3 est un tétraèdre inscrit. Un exemple de configuration 8_5 est donné par deux tétraèdres en liaison harmonique (n° 16). Trois tétraèdres qui sont mutuellement en liaison harmonique forment une configuration 12_7. Certaine configuration 16_7 à diagramme carré est liée aux tétraèdres de Möbius et peut être considérée comme une configuration de Kummer inscriptible. Les configurations autopolaires inscrites 24_9 et 36_{11} sont liées aux tétraèdres des-

miques et à la configuration de Klein (n° 25). La configuration 36_{11} contient d'ailleurs les précédentes: par suppression de termes diagonaux de son diagramme, elle donne naissance à deux nouvelles configurations autopolaires inscrites, de types 24_7 et 16_5.

13. *Quadriques en involution.* — Considérons deux quadriques en involution, c'est-à-dire dont les polarités ont un produit commutatif. Ce produit équivaut à une homographie involutive dans laquelle tout élément tangent à l'une des surfaces (plan tangent et son point de contact) se transforme en élément tangent à la même surface. *Chaque quadrique est donc sa propre polaire réciproque par rapport à l'autre quadrique.*

Prenons l'une des quadriques comme quadrique de base ξ. L'homographie résultant des deux polarités transforme la quadrique en elle-même, donc conserve $N(\xi)$ à un coefficient près : c'est une substitution orthogonale involutive (n° 6). De ce fait, la deuxième quadrique correspond nécessairement à une forme polaire du type

$$U\xi V \quad \text{ou} \quad P\xi P.$$

Il convient par conséquent de distinguer deux espèces d'involution des quadriques respectivement aux deux formules précédentes.

1° Pour étudier la première involution, relative à la forme polaire $U\xi V$, décomposons les vecteurs U et V en produits de quaternions conjugués (n° 11)

$$U = QiQ, \qquad V = Q'iQ'.$$

L'équation cartérienne de la quadrique $U\xi V$ devient

$$\text{p.scalaire } iQ\xi Q'iQ'\bar{\xi}Q = 0.$$

Effectuons alors l'homographie $Q\xi Q'$, que nous interprétons comme un changement de coordonnées (ce qui revient à appliquer la transformation inverse au tétraèdre de référence). La nouvelle équation s'écrit

$$\text{p.scalaire } i\xi i\bar{\xi} = 0,$$

et $U\xi V$ est finalement remplacé par $i\xi i$, qui est la formule d'une des dix quadriques fondamentales.

Ainsi, par un choix convenable des coordonnées, les deux quadriques en involution prennent la forme canonique

$$\xi, \quad i\xi i.$$

Les équations correspondantes prouvent aussitôt que les quadriques ont quatre génératrices communes formant quadrilatère gauche : elles sont tangentes aux sommets d'un *tétraèdre inscrit et circonscrit commun*, à savoir

$$1 \pm \varepsilon i, \quad j \pm \varepsilon k,$$

où ε désigne le scalaire dont le carré vaut -1.

Il existe une double infinité de tétraèdres conjugués communs, dont le tétraèdre de référence $1, i, j, k$. Leurs sommets, situés sur les droites conjuguées $(1, i)$ et (j, k), sont deux à deux conjugués par rapport aux sommets du tétraèdre inscrit et circonscrit commun.

Il existe aussi une double infinité de tétraèdres autopolaires inscrits à l'une des quadriques et conjugués par rapport à l'autre : pour obtenir quatre arêtes d'un tel tétraèdre, il suffit de mener deux génératrices coplanaires sur la première surface et d'en prendre les conjuguées par rapport à la seconde. Les quadriques sont donc *harmoniquement inscrites et circonscrites* l'une à l'autre [1].

2° Afin de réduire à sa plus simple expression l'involution de seconde espèce relative à la formule $P\xi P$, effectuons l'homographie (ou changement de coordonnées) $\xi\overline{P}$. Les deux quadriques prennent la forme canonique

$$\xi, \quad \xi.$$

Elles sont *circonscrites* (tangentes) le long d'une conique du plan 1 (qui est le plan P primitif).

Elles admettent une triple infinité de tétraèdres conjugués communs représentés par l'élément 1 et trois vecteurs mutuellement orthogonaux. Elles sont encore harmoniquement inscrites et circonscrites : il existe une double infinité de tétraèdres ayant pour arêtes deux génératrices non sécantes de la première quadrique et leurs conjuguées par rapport à la deuxième.

14. *Systèmes involutifs de quadriques.* — 1° Considérons plusieurs quadriques en involution mutuelle et supposons d'abord que ces involutions soient toutes de première espèce. L'une des quadriques étant prise comme quadrique de base ξ, toutes les autres ont des formules du type $U\xi V$. Les vecteurs respectifs U sont deux à deux égaux ou orthogonaux et s'expriment donc (n° 11) en fonction d'un *même quaternion* Q, pareillement les vecteurs V s'expriment en fonction d'un même quaternion Q', sous la forme

$$U = \overline{Q}IQ, \qquad V = Q'I'\overline{Q'},$$

I et I' désignant toujours des unités choisies entre i, j, k (et J une unité quelconque). L'homographie $Q\xi Q'$, considérée comme changement de coordonnées, conserve la quadrique ξ et donne aux autres les nouvelles équations

$$\text{p.scalaire } I\xi I'\xi = 0,$$

Par rapport au nouveau tétraèdre de référence, nous obtenons ainsi, y compris la quadrique ξ, un ensemble de quadriques fondamentales $J\xi J'$ dont le nombre est au plus dix.

---

[1] On dit aussi qu'elles sont *harmoniques*.

Dans le système complet des dix quadriques, celles-ci jouent un rôle parfaitement symétrique [16]. Il y a plus : *quel que soit l'ordre dans lequel on range les quadriques*, la figure totale reste semblable à elle-même et il existe un tétraèdre de coordonnées attribuant aux quadriques les *formules canoniques* $J\xi J'$ *dans un ordre quelconque choisi d'avance.* On peut en effet prendre n'importe quelle quadrique comme quadrique de base ξ et choisir arbitrairement l'ordre des trois unités I ou I′, en modifiant Q et Q′ en conséquence. Notons d'autre part que la figure se transforme globalement en elle-même par les homographies des deux groupes fondamentaux G_{16} et G_8.

Il est facile de déterminer tous les *tétraèdres fondamentaux*, c'est-à-dire les tétraèdres de coordonnées par rapport auxquels le système involutif prend la forme canonique $J\xi J'$. Il suffit de remarquer que l'un d'eux, 1, i, j, k, autopolaire par rapport aux dix quadriques, est inscrit et circonscrit à six d'entre elles $I\xi I'(I \neq I')$, ses arêtes étant des génératrices communes. En conséquence, et en vertu de la symétrie du système, un tétraèdre fondamental a pour propriété caractéristique d'avoir deux couples d'arêtes opposées situées en même temps sur deux des dix quadriques. Le nombre des tétraèdres fondamentaux est donc

$$\frac{10 \times 9}{2 \times 3} = 15.$$

Nous montrerons que leurs sommets et leurs faces forment une configuration 60_{15}, dite configuration de Klein (n° 23).

Signalons que tout tétraèdre autopolaire par rapport aux seules quadriques ξ, $i\xi i$, $j\xi j$, même s'il n'est pas fondamental, a nécessairement pour sommets et faces quatre des soixante éléments de la configuration précédente.

2° Considérons maintenant un ensemble involutif de quadriques dont au moins deux, circonscrites le long d'une conique, sont liées par une involution de seconde espèce. Mettons deux telles quadriques sous la forme canonique ξ et ξ. Les autres ont alors nécessairement des formules du type

$$U\xi U \qquad \text{ou} \qquad U\xi U.$$

Les vecteurs respectifs U sont mutuellement égaux ou orthogonaux et s'expriment à l'aide d'un même quaternion Q

$$U = \bar{Q}IQ.$$

L'homographie $Q\xi Q$ conserve les quadriques ξ et ξ, et transforme les autres en $I\xi I$ ou $I\xi I$. L'ensemble est donc transformé en quadriques fondamentales du type $J\xi J$ ou $J\xi J$, dont le nombre est au plus huit.

Les huit quadriques du système total se répartissent en deux séries distinctes de quatre : l'involution est de première ou de seconde espèce suivant que les quadriques appartiennent ou non à la même série. La figure reste invariante par les homographies des deux groupes fondamentaux G_{16} et G_8.

Les tétraèdres autopolaires par rapport aux huit quadriques, le sont notamment par rapport à ξ, $i\xi i$, $j\xi j$, ξ. Leurs sommets figurent donc parmi les soixante sommets de la configuration de Klein. Mais seul le tétraèdre $1ijk$ peut être considéré comme fondamental qui donne aux huit quadriques les équations réduites

$$x^2 \pm y^2 \pm z^2 \pm t^2 = 0.$$

3° Résumons les principaux résultats : *tout ensemble de quadriques en involution mutuelle peut être incorporé, suivant le cas, à un système involutif de huit ou de dix quadriques invariant dans les homographies de deux groupes fondamentaux* G_{16} *et* G_8.

Dans le système involutif de dix quadriques, celles-ci jouent un rôle symétrique. Deux quadriques quelconques du système sont harmoniquement inscrites et circonscrites l'une à l'autre; elles sont aussi inscrites et circonscrites à un même tétraèdre fondamental par rapport auquel (1) *les dix quadriques prennent la forme canonique* $J\Xi J'$. *Les quinze tétraèdres fondamentaux, autopolaires par rapport aux quadriques, constituent une configuration* $6o_{15}$ *de Klein.*

Le système involutif de huit quadriques se sépare en deux ensembles de quatre. Deux quadriques sont harmoniquement inscrites l'une à l'autre et ont quatre génératrices communes si elles appartiennent au même ensemble; sinon elles sont circonscrites le long d'une conique. Parmi les tétraèdres autopolaires, un seul tétraèdre de référence, contenant dans ses faces les seize coniques de contact, donne aux quadriques les formes canoniques $J\Xi J$, $J\Xi J$.

Remarque. — Dans le système des dix quadriques, trois polarités successives équivalent à une polarité par rapport à l'une des quadriques ou par rapport à un complexe linéaire. On est donc amené à compléter le système des quadriques par un système de six complexes en involution mutuelle qui, rapportés à l'un quelconque des tétraèdres fondamentaux, ont pour formules $I\xi$ et ξI.

Inversement, dans un système de six complexes en involution mutuelle, une triple polarité équivaut à une polarité par rapport à l'un des complexes ou par rapport à une quadrique. On peut ainsi associer aux six complexes un système involutif de dix quadriques. Il s'ensuit que le système des complexes possède aussi 15 tétraèdres fondamentaux formant une configuration de Klein.

D'une manière plus générale, on pourrait étudier des systèmes de n complexes ou quadriques dont chacun ou chacune serait en involution avec p autres. Citons notamment le cas de n quadriques dont chacune serait en involution de première espèce avec 9 autres, n ne devant être ni premier, ni double de nombre premier.

(1) Avec un point unitaire convenablement choisi.

15. *Couple de tétraèdres conjugués.* — 1° Soient deux tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique choisie comme quadrique de base. Prenons le premier comme tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ et définissons le second par deux quaternions P et Q sous la forme

$$\mathfrak{T}, \quad P\mathfrak{T}Q.$$

L'homographie propre $P\xi Q$, ou son inverse $P\xi Q$, transforme un tétraèdre en l'autre, mais ne conserve le système des deux tétraèdres que si elle est involutive.

Les sommets des tétraèdres (et aussi leurs faces par corrélation) jouissent d'une importante propriété résultant du théorème classique de Hesse [5, 8] : par les huit sommets de deux tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique, il passe une double infinité de quadriques; *toute quadrique contenant sept des sommets contient nécessairement le huitième.*

Ce théorème se vérifie aisément sur la forme canonique des tétraèdres. Désignons en effet par

$$x_0, y_0, z_0, t_0; \quad x_1, y_1, z_1, t_1; \quad x_2, y_2, z_2, t_2; \quad x_3, y_3, z_3, t_3$$

les coordonnées respectives des sommets PQ, PiQ, PjQ, PkQ. Ces seize nombres sont les termes d'une matrice orthogonale d'ordre 4

$$\begin{Vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{Vmatrix}$$

où la somme des termes d'une ligne ou d'une colonne peut être supposée égale à 1, comme norme du quaternion PQ. Toute quadrique circonscrite au tétraèdre de coordonnées $\mathfrak{T}$ a pour équation

$$axy + bxz + cxt + dyz + eyt + fzt = 0$$

et, si elle passe par trois des sommets PJQ, elle passe nécessairement par le quatrième puisque la matrice des coefficients

$$\begin{Vmatrix} x_0y_0 & x_0z_0 & x_0t_0 & y_0z_0 & y_0t_0 & z_0t_0 \\ x_1y_1 & x_1z_1 & x_1t_1 & y_1z_1 & y_1t_1 & z_1t_1 \\ x_2y_2 & x_2z_2 & x_2t_2 & y_2z_2 & y_2t_2 & z_2t_2 \\ x_3y_3 & x_3z_3 & x_3t_3 & y_3z_3 & y_3t_3 & z_3t_3 \end{Vmatrix}$$

est *de rang* 3, tous ses déterminants d'ordre 4 étant nuls : la somme des termes vaut zéro dans chaque colonne, en vertu de l'orthogonalité des colonnes de la première matrice.

Ce théorème de Hesse met en évidence le rôle symétrique des sommets des tétraèdres qui forment ainsi un système de *huit points associés*. En effet,

choisissons arbitrairement l'ordre des sept premiers points, dont quatre déterminent un tétraèdre et les trois autres un triangle. Il existe une quadrique admettant le tétraèdre comme tétraèdre conjugué et le triangle comme triangle conjugué. Le huitième point coïncide nécessairement avec le pôle du plan du triangle, puisque ce pôle appartient à toutes les quadriques passant par les sept premiers points. Ainsi, quelle que soit la façon dont on les associe quatre à quatre, les huit points associés constituent les sommets de deux tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique : ce sont les *sommets* de trente-cinq configurations 8_3 harmoniques.

Quel que soit l'ordre adopté pour les points, il existe donc un système de coordonnées tétraédriques leur attribuant la formule

$$1,\ i,\ j,\ k,\ \mathrm{PQ},\ \mathrm{P}i\mathrm{Q},\ \mathrm{P}j\mathrm{Q},\ \mathrm{P}k\mathrm{Q},$$

que l'on peut considérer comme la *forme canonique des huit points associés*.

2° Un cas intéressant est celui où la transformation propre $\mathrm{P}\xi\mathrm{Q}$ est involutive, ce qui a lieu notamment si P et Q sont des *vecteurs*. (Il suffit d'ailleurs que P et Q aient une composante nulle; la multiplication de P et $\bar{\mathrm{Q}}$ à gauche par l'unité appropriée les transforme en vecteurs et conserve les tétraèdres). *Les tétraèdres* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathrm{P}\mathfrak{T}\mathrm{Q}$, *conjugués par rapport à la quadrique* ξ, *sont alors polaires réciproques par rapport à la quadrique* $\mathrm{P}\xi\mathrm{Q}$ *en involution avec la première*.

Il y a deux manières de considérer ce couple de tétraèdres. Par rapport à la quadrique ξ, c'est une configuration harmonique 8_3 décomposable en deux configurations 4_3. Par rapport à la quadrique $\mathrm{P}\xi\mathrm{Q}$, c'est une configuration harmonique 8_3 représentable par un diagramme cubique

(1)	(PiQ)	(PkQ)	(j)
(PjQ)	(k)	(i)	(PQ)

chaque moitié de ce tableau constituant une face du cube, et chaque parenthèse désignant l'élément formé par le sommet de même nom et son plan polaire par rapport à la quadrique $\mathrm{P}\xi\mathrm{Q}$.

Les tétraèdres étant polaires réciproques par rapport à une quadrique, il résulte d'un théorème de Chasles [2, 8] qu'ils sont aussi *en situation hyperboloïdique* : les droites joignant les sommets homologues sont génératrices d'une même semi-quadrique, de même que les intersections des faces homologues.

Cette propriété peut aussi se vérifier par le calcul : pour que quatre droites soient génératrices d'une même semi-quadrique, il faut et il suffit que tout complexe linéaire contenant trois des droites contienne aussi la quatrième. Autrement dit, *la matrice relative aux coordonnées plückériennes est de rang* 3 et il existe entre elles une même relation linéaire et homogène. Pour les quatre droites qui joignent les sommets homologues J, PJQ des tétraèdres, cette

matrice s'écrit avec les notations du 1°,

$$\begin{Vmatrix} t_0 & 0 & 0 & 0 & -z_0 & y_0 \\ 0 & t_1 & 0 & z_1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & t_2 & -y_2 & x_2 & 0 \\ -x_3 & -y_3 & -z_3 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Puisque P et Q sont des vecteurs, douze coordonnées sont deux à deux égales

$$x_3 = t_0, \quad y_3 = t_1, \quad z_3 = t_2, \quad y_2 = z_1, \quad x_2 = z_0, \quad x_1 = y_0.$$

Les termes ayant une somme nulle dans chaque colonne, la matrice est bien de rang 3.

La même propriété géométrique subsiste (en raison de la remarque faite pour des quaternions P et Q ayant une composante nulle) lorsque la transformation propre $P\xi Q$ se réduit à une homographie harmonique $U\xi$ ou ξU : les deux tétraèdres, polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire, sont alors polaires réciproques par rapport à chacune des trois quadriques $U\xi I$ ou $I\xi U$ et sont, par conséquent, en situation hyperboloïdique de trois manières différentes.

Remarque. — On obtient une écriture plus symétrique des tétraèdres $\mathfrak{T}$ et $P\mathfrak{T}Q$ en effectuant l'homographie $\bar{P}\xi$, ce qui revient à faire un changement de coordonnées. Le premier tétraèdre est alors représenté par des quaternions associés à gauche, et le deuxième par des quaternions associés à droite

$$P, \quad Pi, \quad Pj, \quad Pk; \qquad Q, \quad iQ, \quad jQ, \quad kQ.$$

En particulier, si P et Q sont des vecteurs, les deux tétraèdres $P\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}Q$, polaires réciproques par rapport à la quadrique $P\xi Q$, sont en outre inscrits et circonscrits au nouveau tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$.

16. *Tétraèdres de Möbius.* — Ce sont *deux tétraèdres inscrits l'un dans l'autre* [3], de telle manière qu'un sommet quelconque et la face opposée du premier tétraèdre soient en incidence avec une face et le sommet opposé du second (1).

1° Démontrons qu'une telle figure (nous savons qu'il en existe) constitue une *configuration harmonique*. Désignons par ABCD et EFGH les *sommets* des tétraèdres. Le point A est supposé situé dans le plan du triangle FGH sans être sur les côtés de ce triangle; le point E, homologue de A, est situé dans le plan du triangle BCD sans être sur les côtés; et ainsi de suite pour les autres sommets. Considérons la quadrique $\mathfrak{Q}$ admettant ABCD comme tétraèdre conjugué et EFG comme triangle conjugué. Le plan polaire de A passe par E; le

(1) Il y a d'autres systèmes de tétraèdres inscrits et circonscrits.

plan polaire de E est le plan AFG qui contient H : le point E est donc conjugué harmonique de H par rapport à $\mathfrak{Q}$. On démontre également que les points F et G sont conjugués de H. Par conséquent le second tétraèdre, lui aussi conjugué par rapport à $\mathfrak{Q}$, forme avec le premier une configuration 8_4 autopolaire.

Prenons ABCD comme tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$, et choisissons le point unitaire de telle sorte que $\mathfrak{Q}$ soit la quadrique de base. Les sommets et faces de $\mathfrak{T}$ sont représentés par $1, i, j, k$. Le sommet E et la face opposée sont représentés par un vecteur V. Le point F, situé dans les plans i et V, est de la forme $\lambda i\mathrm{V} + \mu \mathrm{V}i$. Le point G, intersection des plans j, V, $\lambda i\mathrm{V} + \mu \mathrm{V}i$, est de la forme $\lambda i\mathrm{V} - \mu \mathrm{V}i$. Mais les quatre plans k, V, $\lambda i\mathrm{V} \pm \mu \mathrm{V}i$ étant concourants (en H), il est nécessaire que l'un des coefficients λ ou μ soit nul. Prenons par exemple $\mu = 0$. La configuration est alors représentée par l'*expression canonique*

$$1 \quad i \quad j \quad k$$
$$\mathrm{V} \quad i\mathrm{V} \quad j\mathrm{V} \quad k\mathrm{V}.$$

(L'expression analogue, relative à $\lambda = 0$, se ramènerait à la précédente par l'homologie ξ appliquée au point unitaire des coordonnées.) La figure comprend le tétraèdre $\mathfrak{T}$ et son transformé par polarité par rapport au complexe linéaire $\xi\mathrm{V}$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\mathrm{V}.$$

C'est aussi le produit du tétraèdre $\mathfrak{T}$ par le dièdre 1, V, selon le procédé de multiplication des configurations harmoniques.

Sur la forme précédente, on voit immédiatement que la configuration de Möbius est autopolaire par rapport à quatre complexes linéaires et à quatre quadriques en involution mutuelle, à savoir

$$i\xi, \quad j\xi, \quad k\xi, \quad \xi\mathrm{V}; \qquad \xi, \quad i\xi\mathrm{V}, \quad j\xi\mathrm{V}, \quad k\xi\mathrm{V}.$$

Les trois premiers complexes et la première quadrique transforment chaque tétraèdre en lui-même; le quatrième complexe et les trois dernières quadriques échangent les tétraèdres entre eux (1). Ces transformations suffisent à montrer que la configuration est *homographiquement régulière*.

On peut obtenir une nouvelle expression de la figure en incorporant les complexes et les quadriques à un système involutif complet de seize polarités et en mettant celui-ci sous la forme fondamentale $\mathrm{J}\xi\mathrm{J}'$. Il suffit pour cela de décomposer V en un produit de quaternions conjugués $\mathrm{A}i\overline{\mathrm{A}}$ et d'effectuer l'homographie $\xi\mathrm{A}$. La configuration devient

$$\mathrm{A} \quad i\mathrm{A} \quad j\mathrm{A} \quad k\mathrm{A}$$
$$\mathrm{A}i \quad i\mathrm{A}i \quad j\mathrm{A}i \quad k\mathrm{A}i.$$

(1) Corrélativement, les mêmes formules définissent un groupe fini de 8 homographies conservant la configuration.

D'autres tétraèdres de Möbius correspondent visiblement au même système involutif $J\xi J'$. Nous les retrouverons dans l'étude de la configuration de Kummer.

2° Nous venons de voir qu'il existe quatre quadriques par rapport auxquelles les tétraèdres de Möbius ABCD et EFGH sont polaires réciproques ou conjugués. Ces quadriques, en involution mutuelle, jouent un rôle symétrique par rapport à la configuration 8_4 que forment les tétraèdres. En effet, les huits sommets et les huit faces, associés convenablement, constituent *de quatre manières différentes* un couple de tétraèdres de Möbius conjugués par rapport à l'une ou l'autre des quadriques, et l'on passe d'un couple à l'autre en échangeant deux sommets avec leurs homologues. Ainsi les tétraèdres

ABGH, EFCD

forment un couple de Möbius par définition même; ils sont conjugués par rapport à la quadrique que nous avons appelée $i\xi V$ et sont polaires réciproques par rapport aux trois autres quadriques.

Utilisons la forme canonique. Les quatre quadriques ξ et $I\xi V$ ont en commun deux génératrices coupant chacune les droites

AE, BF, CG, DH

qui joignent les sommets homologues des tétraèdres. Les huit points d'intersection correspondants sont représentés par les associés JH et HJ, à droite et à gauche respectivement, d'un même quaternion H de norme nulle, *élément intrinsèque* de la configuration. Aux quatre manières différentes de considérer la figure comme tétraèdres de Möbius correspondent autant de formes canoniques $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}V$: les vecteurs V respectifs sont justement les parties vectorielles des associés du quaternion H (à droite par exemple), à l'ordre et au signe près des coordonnées.

Deux tétraèdres de Möbius étant polaires réciproques par rapport à trois quadriques sont en situation hyperboloïdique de trois manières différentes. Pour le voir directement, choisissons deux arêtes opposées du premier tétraèdre, AB et CD par exemple, et associons-leur les deux systèmes de quatre droites

AB, CD, EF, GH; AF, BE, CH, DG.

De la définition des tétraèdres il résulte que toute droite du premier système coupe les quatre droites du second, et inversement. Ces droites sont donc situées sur une même quadrique Σ; elles se coupent mutuellement en seize points, *sommets* d'une configuration 16_8 autopolaire inscrite dans Σ que nous écrivons

A	B	D′	C′
F	E	G′	H′
B′	A′	C	D
E′	F′	H	G

les points d'une même ligne ou d'une même colonne appartenant à une même génératrice. En vertu de la propriété harmonique de la configuration, le plan polaire de A par rapport à la quadrique $\mathfrak{Q}$ coïncide avec le plan tangent en A′ à la quadrique Σ. Il en est ainsi pour deux points quelconques du tableau précédent représentés par la même lettre, accentuée ou non. La quadrique Σ se transforme donc en elle-même par polaires réciproques par rapport à $\mathfrak{Q}$.

Aux trois manières possibles de choisir deux arêtes opposées de $\mathfrak{T}$ correspondent trois quadriques Σ, qui sont d'ailleurs les mêmes pour les autres couples de tétraèdres. Leurs équations et leurs formules polaires sont respectivement

$$\text{p. scalaire } I\xi IV\bar{\xi} = 0, \qquad I\xi(IV - VI),$$

où I désigne l'une des unités i, j, k. Observons que les quadriques Σ et les quatre quadriques décomposées en les couples de plans homologues J, JV appartiennent à un même réseau linéaire ponctuel dont les huit points associés sont les sommets des tétraèdres. Corrélativement, les quadriques Σ et les quadriques dégénérées en les couples de points homologues J, JV appartiennent à un même réseau tangentiel admettant les faces des tétraèdres comme plans tangents communs.

Résumons les principaux résultats :

Deux tétraèdres de Möbius forment une configuration harmonique 8_4, *homographiquement régulière. Celle-ci, autopolaire par rapport à quatre quadriques* $\mathfrak{Q}$ *en involution mutuelle, représente un couple de tétraèdres de Möbius de quatre manières différentes. Les tétraèdres de chaque couple sont conjugués par rapport à l'une des quadriques* $\mathfrak{Q}$ *et sont polaires réciproques par rapport aux trois autres. Ils sont, par suite, en situation hyperboloïdique de trois manières; les hyperboloïdes correspondants, inscrits et circonscrits aux tétraèdres, sont en involution de première espèce avec chaque quadrique* $\mathfrak{Q}$.

3° *Cas particulier : tétraèdres en liaison harmonique.* — Lorsque le vecteur V a seulement deux composantes non nulles, les tétraèdres $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}V$ ont deux couples d'arêtes colinéaires : les sommets de l'un sont situés sur deux arêtes opposées de l'autre, cas particulier que nous avions exclu de prime abord. Les huit sommets, répartis sur deux droites, forment deux divisions harmoniques, et les huit faces forment corrélativement deux faisceaux harmoniques. Pour abréger, nous dirons que deux tels tétraèdres sont *en liaison harmonique*.

On démontre aisément sur la forme canonique que ces tétraèdres, conjugués par rapport à la quadrique de base ξ, sont aussi *autopolaires inscrits* (et circonscrits) relativement à deux autres quadriques fondamentales du type $I\xi I'$. Ils constituent donc une configuration 8_5 qui est harmonique de six manières.

17. *Tétraèdres desmiques.* — 1° Deux tétraèdres sont dits *desmiques* (ou en liaison desmique) si *une arête quelconque de l'un coupe deux arêtes opposées de l'autre* [6, 13, 15, 17].

Dans une telle figure, la surface d'un tétraèdre découpe sur une face quelconque de l'autre un quadrilatère complet dont les diagonales sont les arêtes de cette face; une arête quelconque détermine donc, par ses intersections avec les autres arêtes, quatre points d'une division harmonique. Par conséquent, si l'on se donne l'un des tétraèdres, on peut construire l'autre à partir d'un seul de ses sommets A : il suffit de mener du point A les trois droites qui coupent chacune deux arêtes opposées du tétraèdre donné et, sur chaque droite, de prendre le conjugué harmonique de A par rapport aux deux points d'intersection obtenus.

Choisissons le premier tétraèdre comme tétraèdre $\mathfrak{T}$ de référence

$$1, \quad i, \quad j, \quad k.$$

Les *sommets* du second ont alors pour formule

$$A, \quad iAi, \quad jAj, \quad kAk.$$

On voit aisément que les deux tétraèdres possèdent la propriété remarquable d'être en perspective par rapport à quatre centres différents, à savoir

$$\bar{A}, \quad i\bar{A}i, \quad j\bar{A}j, \quad k\bar{A}k,$$

qui sont les transformés des sommets précédents dans l'homologie involutive $\bar{\xi}$. Cette *quadruple perspective*, que nous préciserons tout à l'heure, est une propriété caractéristique des tétraèdres desmiques et pourrait servir de définition.

Démontrons que *deux tétraèdres desmiques forment une configuration harmonique* 8_3 et cherchons-en la forme canonique. Pour que le deuxième tétraèdre soit, comme le premier, conjugué par rapport à la quadrique de base, il faut et il suffit que les quatre quaternions JAJ soient mutuellement orthogonaux, c'est-à-dire que les composantes de A soient égales ou opposées deux à deux. Pour cela il suffit de choisir A comme point unitaire des coordonnées, lequel sera représenté par le quaternion ρ (1) de norme 1

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + i + j + k).$$

Les associés de ce quaternion le sont en même temps à droite et à gauche, de sorte que par exemple

$$\rho i = j\rho, \qquad i\rho i = k\rho, \qquad j\rho j = i\rho, \qquad k\rho k = j\rho.$$

(1) Suivant une notation de Hurwitz.

Les sommets et les *faces* des tétraèdres se présentent alors sous la forme canonique

$$\mathfrak{S},\quad \mathfrak{S}\rho,$$

et constituent une configuration 8_3 harmonique, couple de tétraèdres particuliers conjugués par rapport à la quadrique de base.

La configuration est *homographiquement régulière* : chaque tétraèdre se transforme en lui-même par les homographies du groupe fondamental G_{16} et se transforme en l'autre tétraèdre par quatre homologies involutives dont les centres (et les plans) sont $J\rho$. Ces vingt transformations s'écrivent

$$J\xi J',\quad J\rho\xi J\bar{\rho}.$$

Corrélativement, les tétraèdres sont autopolaires par rapport aux *dix quadriques fondamentales* $J\xi J'$ (ils sont conjugués par rapport à la seule quadrique de base) et sont polaires réciproques par rapport à quatre quadriques en involution mutuelle (n° 13). Remarquons que la configuration est *autopolaire inscrite* de trois manières : les deux tétraèdres sont simultanément inscrits (et circonscrits) à trois quadriques fondamentales.

La transformation propre $\xi\rho$, qui fait passer du premier tétraèdre au second, est une *homographie cyclique d'ordre* 3 puisque le quaternion ρ vérifie les relations

$$\rho^2 = -\bar{\rho},\qquad \rho^3 = -1.$$

Il en résulte que le couple desmique $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}\rho$ est projectivement équivalent à $\mathfrak{S}\rho$, $\mathfrak{S}\bar{\rho}$ dont les huit éléments sont représentés par les quaternions entiers de norme 4

$$1 \pm i \pm j \pm k.$$

Cette formule très symétrique peut être considérée comme une nouvelle forme canonique du couple de tétraèdres desmiques.

2° *Systèmes desmiques.* — Étant donnés deux tétraèdres desmiques mis sous la forme canonique $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}\rho$, il leur correspond un troisième tétraèdre $\mathfrak{S}\bar{\rho}$ qui forme avec eux un *groupe cyclique* de trois tétraèdres

$$\mathfrak{S},\quad \mathfrak{S}\rho,\quad \mathfrak{S}\bar{\rho}.$$

Cette configuration harmonique non inscriptible sera appelée *système desmique*; ses trois tétraèdres, qui jouent un rôle symétrique, sont conjugués (et non seulement autopolaires) par rapport à une même quadrique. Deux tétraèdres quelconques de l'ensemble sont desmiques (¹) et sont en correspondance homologique de quatre manières différentes; les centres et les plans d'homologie forment le troisième tétraèdre.

(¹) Nous verrons qu'il existe un autre ensemble de trois tétraèdres mutuellement desmiques formant une configuration autopolaire inscrite.

Sous leur forme canonique, les douze éléments du système desmique sont représentés par les douze unités de l'arithmétique de Hurwitz [27]

$$1,\quad i,\quad j,\quad k,\quad \frac{1}{2}(1 \pm i \pm j \pm k),$$

quaternions de norme 1 dont les composantes sont des entiers ou des moitiés de nombres impairs : nous les désignerons ci-après par la lettre H.

Les douze éléments jouent un rôle symétrique et déterminent une configuration homographiquement régulière puisqu'il suffit de multiplier l'un quelconque d'entre eux, à droite ou à gauche, par les douze unités H pour obtenir le système total. Les transformations linéaires correspondantes

$$\xi H \qquad \text{ou} \qquad H\xi$$

conservent globalement le système et constituent un groupe fini d'ordre 12, moitié d'un groupe desmique. Elles résultent, par multiplications successives, de trois d'entre elles convenablement choisies, par exemple ξi, ξj, $\xi\rho$ pour le groupe ξH.

Certaines transformations involutives, tout en conservant la figure, permettent d'en *échanger* deux éléments quelconques. Ce sont les transformations

$$J\xi J', \quad H\xi H,$$

c'est-à-dire seize homographies fondamentales conservant chaque tétraèdre et douze homologies involutives qui échangent deux tétraèdres et conservent le troisième. Les polarités correspondant aux mêmes formules représentent d'une part un système involutif de six complexes et dix quadriques et, d'autre part, une douzaine de quadriques qui, associées aux précédentes, constituent de nouveaux systèmes involutifs.

Résumons-nous :

Le système desmique comprend trois tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique (quadrique de base) et constitue une configuration harmonique 12_3 *homographiquement régulière. Il se transforme en lui-même par polarité par rapport aux six complexes linéaires et aux vingt-deux quadriques distinctes du système involutif d'ordre* 16 *et des trois systèmes involutifs d'ordre* 8 *que déterminent respectivement la quadrique de base et chacun des tétraèdres pris comme tétraèdre de référence.*

Les arêtes des tétraèdres forment une figure symétrique de dix-huit droites dans laquelle chacune d'elles en coupe huit autres. Plus exactement, chaque arête du premier tétraèdre est divisée harmoniquement par deux arêtes opposées du deuxième et, *aux mêmes points*, par deux arêtes opposées du troisième. Il en résulte que trois arêtes convenablement choisies, appartenant chacune à un tétraèdre différent, sont concourantes. Corrélativement, les trois arêtes conjuguées des précédentes par rapport à la quadrique de base, leurs

opposées dans chaque tétraèdre, sont coplanaires et portent six sommets d'un quadrilatère complet dont elles sont diagonales.

D'autre part, la quadruple homologie des tétraèdres démontre que leurs douze sommets sont alignés par trois sur seize droites, quatre droites passant par chaque sommet. Corrélativement, dans chaque face, se trouvent quatre droites appartenant chacune à deux nouvelles faces.

18. *Configuration desmique* 24_9. — Donnons-nous un système desmique $\mathfrak{S}$ et mettons ses trois tétraèdres sous la forme canonique $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}\rho, \mathfrak{T}\bar{\rho}$. Nous savons que les arêtes prises par trois sont concourantes en un point qui est commun à six faces et, corrélativement, que les sommets groupés par six sont coplanaires.

Étudions les douze points par chacun desquels passent trois arêtes et les douze plans contenant chacun six sommets. On obtient tous ces éléments en appliquant à l'un d'eux, $j+k$ par exemple, les transformations qui laissent invariant le système $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire en multipliant cet élément (à gauche par exemple) par les douze unités H de Hurwitz, ce qui donne

$$\mathrm{H}(j+k).$$

Il revient au même de multiplier les douze éléments de $\mathfrak{S}$ à droite par le vecteur $j+k$. Les points et les plans considérés forment donc un nouveau système desmique $\mathfrak{S}'$ représenté par la formule

$$\mathrm{J} \pm \mathrm{J}',$$

somme ou différence de deux unités quelconques. Les trois tétraèdres de ce système

$$(1 \pm i, j \pm k), \quad (1 \pm j, k \pm i), \quad (1 \pm k, i \pm j)$$

ont les arêtes communes avec ceux du système $\mathfrak{S}$: ils sont en *liaison harmonique* (n° 16) avec chaque tétraèdre de $\mathfrak{S}$. C'est ainsi, par exemple, que les arêtes $(1, i)$ et $(1+i, 1-i)$ sont portées par la même droite, sur laquelle elles déterminent une division harmonique.

En réunissant les deux systèmes desmiques $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, nous obtenons une *configuration harmonique* 24_9 *homographiquement régulière* (¹) que nous appelons *configuration desmique*. En effet, d'une part les éléments de la figure jouent un rôle symétrique : ils s'obtiennent à partir de l'un d'eux par les homographies d'un groupe desmique G'_{24} ou G''_{24} correspondant à la multiplication à droite ou à gauche par les quaternions K (n° 7). D'autre part, chaque plan contient bien neuf sommets, le plan 1 par exemple contenant les points

$$i, \quad j, \quad k, \quad i \pm j, \quad j \pm k, \quad k \pm i,$$

intersections des côtés et des diagonales d'un même quadrilatère complet.

(¹) Certains auteurs réservent le nom de *configuration harmonique* à cette seule figure.

La moitié des transformations du groupe desmique, à savoir la multiplication à droite (ou à gauche) par une unité H, conserve chacun des systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, l'autre moitié, correspondant à la multiplication par $J \pm J'$, échange les systèmes entre eux. Le groupe desmique total résulte lui-même des multiplications répétées de trois transformations seulement qui sont, pour G'_{24}, par exemple,

$$\xi(1+i), \quad \xi(1+j), \quad \xi(1+k)$$

ou encore, si l'on préfère utiliser des homographies involutives,

$$\xi(j+k), \quad \xi(k+i), \quad \xi(i+j).$$

La configuration desmique 24_9 peut donc être obtenue à partir d'un quelconque de ses éléments au moyen de polarités successives et répétées par rapport à trois complexes linéaires convenablement choisis.

Les six tétraèdres de la figure, tous *conjugués* par rapport à la quadrique de base, jouent le même rôle : on passe de l'un à l'autre par une transformation du groupe desmique. Rappelons que *chaque tétraèdre est en liaison desmique avec deux autres et en liaison harmonique avec les trois derniers*. La configuration totale est autopolaire par rapport aux systèmes involutifs d'ordre 16 et d'ordre 8 déterminés par la quadrique de base et chacun des six tétraèdres.

Remarque. — Déjà Poncelet [1] avait étudié la configuration que forment les douze centres d'homothétie de quatre sphères prises deux à deux, les quatre faces du tétraèdre déterminé par leurs centres et leurs huit plans d'homothétie. C'est là une configuration 12_6, réciproque à elle-même mais non harmonique (1), qui peut être considérée comme la « moitié » d'une configuration desmique. Si nous choisissons en effet les centres des sphères comme sommets du tétraèdre de coordonnées, avec un point unitaire approprié, les douze centres d'homothétie prennent la forme $J \pm J'$. En transformant la figure par polaires réciproques par rapport à la quadrique de base, nous obtenons une nouvelle configuration 12_6 qui, jointe à la première, forme une configuration desmique 24_9.

19. *Configuration de Kummer.* — C'est l'ensemble de *quatre tétraèdres inscrits l'un dans l'autre, tétraèdres de Möbius deux à deux* [7]. De façon équivalente, c'est une *configuration 16_6 ayant un diagramme d'incidence de forme carrée.*

1° Un exemple type de configuration harmonique 16_6 résulte immédiatement de la propriété algébrique des quaternions que voici :

Tout quaternion A est orthogonal à ses trois associés à gauche, Ai, Aj, Ak, et à ses trois associés à droite iA, jA, kA. D'une manière plus générale, J et J'

(1) Ou configuration de Reye.

désignant deux unités quelconques, le produit JAJ′ est orthogonal aux six quaternions

$$JAJ'i,\quad JAJ'j,\quad JAJ'k,\quad iJAJ',\quad jJAJ',\quad kJAJ'$$

qui sont les associés de A divisibles à gauche par JA, ou à droite par AJ′. Nous obtenons ainsi le *tableau d'orthogonalité des seize quaternions associés*

$$\begin{array}{cccc} A & iA & jA & kA \\ Ai & iAi & jAi & kAi \\ Aj & iAj & jAj & kAj \\ Ak & iAk & jAk & kAk. \end{array}$$

Deux quaternions d'une même ligne sont associés à droite, deux quaternions d'une même colonne sont associés à gauche. Deux quaternions d'une même ligne ou d'une même colonne sont orthogonaux.

Les seize points et les seize plans correspondant aux quaternions associés forment une configuration 16_6, et le tableau d'orthogonalité représente aussi bien un *diagramme d'incidence* : tout élément du tableau est en incidence avec les six éléments situés dans la même ligne ou la même colonne [9].

Les quaternions, et par suite les éléments, sont tous distincts si les carrés des composantes de A ne sont pas deux à deux égaux ou opposés, et si au moins trois composantes ne sont pas nulles. En outre, pour que la configuration soit effectivement du type 16_6, il est nécessaire que la norme de A soit différente de zéro.

C'est ainsi qu'on obtient un exemple simple en prenant pour A la somme de trois unités; la configuration particulière qui en résulte prend l'expression intéressante

$$J \pm J' \pm J'',$$

où les J sont trois unités distinctes quelconques choisies entre $1, i, j, k$.

2° Nous allons montrer que *toute configuration de Kummer est nécessairement harmonique et se ramène à la forme canonique des seize quaternions associés par un choix convenable du système de coordonnées.*

Considérons quatre tétraèdres mutuellement inscrits et circonscrits, tétraèdres de Möbius l'un à l'autre. Les deux premiers constituent une configuration harmonique qui, rapportée à sa quadrique de base, s'écrit

$$\mathfrak{C},\quad \mathfrak{C}V.$$

Les sommets homologues 1 et V sont situés dans une face du troisième tétraèdre : celle-ci est représentée par un vecteur V′ orthogonal à V. Les trois sommets de la face V′ sont les intersections des plans respectifs

$$(i, iV, V'),\quad (j, jV, V'),\quad (k, kV, V')$$

et sont justement les points iV', jV', kV' mutuellement conjugués harmoniques par rapport à la quadrique de base déjà définie. Cette propriété de conjugaison est évidemment valable pour le quatrième sommet qui est donc le pôle de la face V' : le vecteur V' représente simultanément le plan d'une face et le sommet opposé. Le troisième tétraèdre est conjugué par rapport à la quadrique de base et prend la forme $\mathfrak{T}V'$.

Il en est de même du quatrième tétraèdre, qui s'écrit $\mathfrak{T}V''$. La configuration de Kummer est alors de la forme

$$\mathfrak{T},\quad \mathfrak{T}V,\quad \mathfrak{T}V',\quad \mathfrak{T}V'',$$

où V, V', V'' désignent des vecteurs mutuellement orthogonaux. C'est, si l'on veut, le produit de deux tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique de base, au sens de la multiplication des configurations harmoniques.

Selon une méthode déjà utilisée, décomposons les vecteurs en produits de quaternions conjugués

$$V=AiA',\qquad V'=AjA',\qquad V''=AkA',$$

et effectuons l'homographie ξA considérée comme changement de coordonnées. Les tétraèdres s'écrivent alors

$$\mathfrak{T}A,\quad \mathfrak{T}Ai,\quad \mathfrak{T}Aj,\quad \mathfrak{T}Ak$$

et sont représentés par les seize quaternions JAJ' associés à A. La configuration devient identique à celle du 1° : nous dirons qu'elle est mise sous la *forme canonique*, ou encore qu'elle est rapportée à un *tétraèdre fondamental*.

Ainsi, la configuration de Kummer la plus générale dépend de dix-huit paramètres : quinze servent à déterminer le tétraèdre de coordonnées (tétraèdre fondamental) et son point unitaire; les trois autres paramètres, qui déterminent le quaternion A, sont liés aux éléments intrinsèques de la configuration invariants dans toute transformation linéaire.

3° Sur la forme canonique JAJ' on voit aussitôt que *la configuration de Kummer se transforme en elle-même par les homographies du groupe fondamental* G_{16}, *homographies qui permettent d'échanger deux quelconques de ses éléments : la figure est donc homographiquement régulière. Elle est autopolaire par rapport au système involutif correspondant de six complexes et dix quadriques* et, de cette manière, peut être construite tout entière à partir d'un quelconque de ses sommets.

Les tétraèdres fondamentaux du système involutif sont aussi ceux de la configuration. *Il y a donc quinze tétraèdres fondamentaux, formant une configuration de Klein, par rapport à chacun desquels la configuration de Kummer prend la forme canonique des seize quaternions associés.*

20. *Seize formes linéaires.* — Ouvrons une parenthèse et, pour quelques instants, ayons recours aux procédés ordinaires de la géométrie analytique. L'utilisation directe des coordonnées, au lieu de quaternions, permet de simplifier l'étude de certaines questions, celles par exemple qui font intervenir les seuls sommets d'une configuration de Kummer (ou les seules faces, par corrélation), et non les éléments eux-mêmes.

Définissons un point A, ou un plan, par quatre coordonnées homogènes, x_0, y_0, z_0, t_0 et, en leur adjoignant les coordonnées courantes x, y, z, t, utilisons la forme linéaire

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z + t_0 t$$

qui, égalée à zéro, donne l'équation du point ou du plan.

Aux seize sommets JAJ' d'une configuration de Kummer rapportée à son tétraèdre fondamental correspondent alors seize formes linéaires. Nous allons montrer qu'on peut les considérer comme les *seize termes d'une matrice orthogonale d'ordre* 4.

Désignons par ξ le quaternion relatif aux coordonnées courantes. L'élément du diagramme d'incidence situé dans la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et la $\beta^{\text{ième}}$ colonne est $J_\beta A J_\alpha$, produit de A par les unités J_α et J_β. La forme linéaire correspondante s'écrit

$$\text{p. scalaire } J_\beta A J_\alpha \xi = \text{p. scalaire } A J_\alpha \xi J_\beta,$$

somme des produits respectifs des composantes de AJ_α par celles de $J_\beta\xi$. La matrice des seize formes linéaires est donc le produit de deux matrices. Les lignes de la première sont les composantes des quaternions AJ_α associés à gauche et forment la matrice à gauche [29] du quaternion A, matrice orthogonale (au produit près de tous les termes par un même nombre); les colonnes de la seconde correspondent aux associés à droite de ξ et forment aussi une matrice orthogonale :

$$\begin{Vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ -y_0 & x_0 & t_0 & -z_0 \\ -z_0 & -t_0 & x_0 & y_0 \\ -t_0 & z_0 & -y_0 & x_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x & y & z & t \\ y & -x & -t & z \\ z & t & -x & -y \\ t & -z & y & -x \end{Vmatrix}.$$

Le produit est une matrice orthogonale, au produit près de tous les termes par un même nombre.

On peut donc appliquer aux seize formes linéaires les propriétés connues des matrices orthogonales : égalité de la somme des carrés des termes dans les lignes et dans les colonnes, orthogonalité des lignes ou des colonnes, égalité des mineurs complémentaires. Nous avons ainsi procédé au n° 15 pour les tétraèdres conjugués. Au reste, les seize formes linéaires peuvent être considérées comme les coordonnées successives des quatre points

$$\xi A, \quad \xi i A, \quad \xi j A, \quad \xi k A,$$

sommets d'un tétraèdre (variable avec ξ) conjugué par rapport à la quadrique de base.

Cette méthode permet d'établir ou de vérifier par le calcul d'importants résultats géométriques sur la configuration de Kummer. Nous allons rappeler les propriétés qui nous semblent le mieux adaptées à notre théorie des configurations harmoniques.

21. *Quelques propriétés de la configuration de Kummer.* — En vue de préciser la structure de la configuration de Kummer, nous allons étudier certains groupements de ses points et de ses plans caractérisés par une propriété géométrique simple. Dans les cas les plus intéressants, ces groupements restent invariants dans l'un des sous-groupes d'homographies conservant la configuration; les homographies du groupe fondamental G_{16} les transforment alors en groupements semblables dont l'ensemble contient la configuration entière une ou plusieurs fois [12, 25].

D'abord nous supposons que la configuration de Kummer est rapportée à un tétraèdre fondamental particulier $\mathfrak{T}_0$ et, par conséquent, qu'elle est représentée par seize quaternions associés JA_0J'. Nous pouvons substituer au quaternion A_0 l'un quelconque de ses associés A_i, ce qui correspond à l'invariance de la figure par les homographies du groupe G_{16} et à l'isomorphie du diagramme d'incidence dont on peut choisir arbitrairement le premier terme. Nous pouvons aussi effectuer une permutation quelconque ou changement de signe des coordonnées, notamment la transformation homologique Ξ qui, avec la nouvelle formule $J'A_0J$, permet l'échange global des lignes et des colonnes du diagramme. Enfin, nous pouvons prendre comme quadrique de base l'une quelconque des dix quadriques fondamentales et comme tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ l'un des six tétraèdres fondamentaux conjugués par rapport à cette quadrique.

Il y a donc un grand nombre de formes canoniques liées à toutes les transformations qui conservent la configuration. Nous désignerons leur formule générale par JAJ', et nous remettons à plus tard la détermination des quaternions A en fonction de l'un d'eux A_0.

1° Étudions en premier lieu les tétraèdres, dits *tétraèdres de Rosenhain, dont tous les sommets et toutes les faces sont des points et des plans de la configuration.*

Considérons trois sommets d'un tel tétraèdre, situés par exemple dans la face A_1, le quaternion A_i étant associé à A_0. Deux cas se présentent :

Si les trois sommets figurent dans la même ligne du diagramme (ou la même colonne, mais il suffit alors d'effectuer la transformation ξ), ils s'écrivent iA_1, jA_1, kA_1. Le quatrième sommet est alors A_1. Le tétraèdre considéré s'écrit donc

$$A_1, \quad iA_1, \quad jA_1, \quad kA_1$$

et il est conjugué par rapport à la quadrique de base. Cette formule ainsi ordonnée est d'ailleurs valable quel que soit l'ordre adopté pour les sommets du tétraèdre : il suffit d'appeler A_1 le plan des trois derniers sommets puis, s'il y a lieu, de faire une permutation convenable des coordonnées en modifiant A_1 en conséquence.

Si deux sommets seulement figurent dans la même ligne, par exemple iA_1, jA_1, et le troisième A_1j, le tétraèdre est du type

$$iA_1, \quad jA_1, \quad A_1j, \quad kA_1j.$$

Il est conjugué par rapport à l'une des quadriques fondamentales (en l'occurence la quadrique $k\xi j$). Prenons celle-ci comme quadrique de base, en modifiant le tétraèdre de référence. Dans le nouveau diagramme d'incidence les quatre éléments du tétraèdre figurent dans la même ligne ou la même colonne : nous sommes ramené au cas précédent.

Ainsi, étant donné un tétraèdre de Rosenhain, dont *les sommets sont rangés dans un ordre quelconque*, il existe un tétraèdre fondamental par rapport auquel la configuration s'écrit JAJ′ et qui donne aux sommets et faces du tétraèdre la *formule canonique*

$$A, \quad iA, \quad jA, \quad kA.$$

Ce tétraèdre, conjugué par rapport à l'actuelle quadrique de base, reste invariant dans le sous-groupe $J\xi$ d'ordre 4. Les seize homographies fondamentales le transforment en *quatre tétraèdres associés*, dont lui-même, qui correspondent aux quatre lignes du diagramme d'incidence. Ces tétraèdres reforment à eux quatre toute la configuration, ils sont conjugués par rapport à la même quadrique, ils sont mutuellement inscrits et circonscrits (¹).

Le raisonnement s'applique également aux colonnes du diagramme et, d'autre part, il est valable pour chacune des dix quadriques fondamentales du système involutif. A chaque quadrique correspondent ainsi deux groupes de quatre tétraèdres associés, conjugués par rapport à cette quadrique. Il y a donc au total 80 tétraèdres de Rosenhain : *la configuration de Kummer est, de vingt manières différentes, un ensemble de quatre tétraèdres de Rosenhain mutuellement inscrits et circonscrits* [24].

2° Considérons *six sommets coplanaires* quelconques, par exemple ceux de la face A_1. Ils sont représentés par des quaternions $1A_1$ et $A_1 1$, respectivement associés de A_1 à droite et à gauche.

Rangeons ces sommets dans un ordre arbitraire. Les trois premiers pouvant être considérés comme sommets d'un tétraèdre de Rosenhain, il existe un tétraèdre fondamental de référence leur attribuant la formule iA_2, jA_2. kA_2.

(¹) Cette propriété de conjugaison et inscription résulte, si l'on veut, de l'orthogonalité de la matrice des seize formes linéaires relativement aux lignes.

Les trois derniers sommets s'écrivent alors A_2i, A_2j, A_2k, à l'ordre près. Pour les mettre exactement dans cet ordre, s'il ne le sont pas, il suffit d'opérer le changement de coordonnées ξK et de remplacer A_2 par A_2K, où K désigne l'un des cinq quaternions $1+I$, φ, $\bar{\varphi}$, quaternions entiers de norme 2 ou 4 (n° 7). Cette transformation revient d'ailleurs à remplacer le tétraèdre de référence par l'un des cinq autres tétraèdres fondamentaux conjugués par rapport à la quadrique de base.

Par conséquent, étant donnés *six sommets coplanaires rangés dans un ordre quelconque*, il est possible de trouver un tétraèdre de coordonnées par rapport auquel la configuration prend la forme canonique JAJ′ et qui donne aux six sommets respectifs la formule

$$iA,\quad jA,\quad kA,\quad Ai,\quad Aj,\quad Ak.$$

Les sommets coplanaires jouissent de la remarquable propriété d'*être situés sur une même conique*. On peut le montrer de diverses manières. En effet, les triangles

$$(iA, jA, kA),\quad (Ai, Aj, Ak)$$

sont tous deux conjugués par rapport à la conique section de la quadrique de base par le plan A; ils sont donc inscriptibles dans une même conique, d'après le théorème classique de Poncelet. On peut aussi dire que les côtés opposés de l'hexagone

$$iA,\quad Aj,\quad kA,\quad Ai,\quad jA,\quad Ak$$

se coupent en trois points alignés sur l'intersection du plan A et du plan diagonal contenant les points iAi, jAj, kAk; l'hexagone est donc inscriptible dans une conique d'après le théorème de Pascal. Enfin, si l'on préfère utiliser les formes linéaires relatives aux six points, celles-ci figurent dans la première ligne et la première colonne d'une même matrice orthogonale; leurs carrés vérifient une relation linéaire; les six points se trouvent donc sur une conique, selon un résultat dû à P. Serret [8].

On passe d'une face à l'autre de la configuration par une transformation homographique du groupe G_{16}. Il en résulte que la *situation projective des six points coplanaires sur leur conique est la même dans les seize faces de la configuration*. Cette situation se traduit par trois rapports anharmoniques, éléments intrinsèques de la figure [11, 14].

3° Groupons par deux les six points contenus dans une face et considérons la nouvelle face passant par chaque couple de points. Les trois faces ainsi obtenues forment avec la première un tétraèdre dont les sommets n'appartiennent pas à la configuration : nous l'appelons *tétraèdre « planaire » de Göpel*. Chaque arête de ce tétraèdre passe par deux sommets de la configuration et chacune de ses faces contient six sommets sur une même conique. Les quatre faces contiennent *douze sommets* distincts situés sur une même quadrique Σ.

Les quatre sommets restants déterminent un tétraèdre dont les faces ne font pas partie de la configuration : nous l'appelons *tétraèdre ponctuel* de Göpel, complémentaire du précédent.

Puisqu'il y a quinze manières de grouper six points par deux, chaque face de la configuration appartient à quinze tétraèdres planaires. Par suite, il y a en tout *soixante* tétraèdres planaires et un nombre égal de tétraèdres ponctuels ou de quadriques Σ.

Les trois couples de points coplanaires qui ont servi à définir le tétraèdre de Göpel peuvent s'écrire, par un choix convenable du tétraèdre de référence,

$$(i\mathrm{A}, \mathrm{A}i), \quad (j\mathrm{A}, \mathrm{A}j), \quad (k\mathrm{A}, \mathrm{A}k).$$

Ils sont situés dans la face A, et respectivement, dans les faces $i\mathrm{A}i$, $j\mathrm{A}j$, $k\mathrm{A}k$. Nous obtenons ainsi une *forme canonique du tétraèdre planaire*, quel que soit l'ordre adopté pour ses faces,

$$\mathrm{A}, \quad i\mathrm{A}i, \quad j\mathrm{A}j, \quad k\mathrm{A}k.$$

Le tétraèdre ponctuel complémentaire est justement représenté par les mêmes quaternions : il est le transformé du précédent par polaires réciproques par rapport à la quadrique de base. Ce tétraèdre ponctuel reste invariant dans le sous-groupe des quatre homographies $\mathrm{J}\Xi\mathrm{J}$; il se transforme en *quatre tétraèdres ponctuels associés*, dont lui-même, par les homographies du groupe fondamental G_{16}.

Quatre tétraèdres ponctuels associés ont pour sommets les seize sommets de la configuration. Leurs faces se déduisent de l'une d'elles par les homographies du groupe G_{16} et appartiennent à une nouvelle configuration de Kummer ayant les mêmes tétraèdres fondamentaux que la précédente. Les quatre tétraèdres sont, d'autre part, en *liaison desmique* avec le même tétraèdre fondamental (qui, relativement à la forme canonique, est le tétraèdre de référence); si l'on complète par un troisième tétraèdre les systèmes desmiques correspondants, on obtient quatre nouveaux tétraèdres dont les sommets constituent une configuration de Kummer $\mathrm{J}\bar{\mathrm{A}}\mathrm{J}'$ quadruplement homologique de la configuration initiale (n° 26).

4° Étudions un autre groupement remarquable de six points, l'*hexade de Weber*. On l'obtient en considérant un tétraèdre de Rosenhain et un tétraèdre ponctuel de Göpel ayant un sommet commun : les six autres sommets constituent l'hexade [12, 14, 17].

Mettons d'abord le tétraèdre de Rosenhain sous sa forme canonique A, $i\mathrm{A}$, $j\mathrm{A}$, $k\mathrm{A}$ et désignons le sommet commun par A. On voit tout de suite que les sommets du tétraèdre de Göpel sont en dehors du plan A et que deux quelconques d'entre eux ne peuvent figurer dans une même ligne ou une même colonne du diagramme d'incidence; ils s'écrivent donc

$$\mathrm{A}, \quad i\mathrm{A}i', \quad j\mathrm{A}j', \quad k\mathrm{A}k',$$

i', j', k' désignant, à l'ordre près, les unités i, j, k. Pour les mettre exactement dans cet ordre, il suffit d'opérer, s'il y a lieu, le changement de coordonnées ξK utilisé au 2°. Il en résulte alors cette *forme canonique* de l'hexade de Weber

$$i\Lambda,\quad j\Lambda,\quad k\Lambda,\quad i\Lambda i,\quad j\Lambda j,\quad k\Lambda k.$$

Seule, la transformation identique laisse l'hexade invariante; les homographies du groupe G_{16} la transforment en seize hexades distinctes.

En s'aidant de la forme canonique et du diagramme, on montre que l'un quelconque des dix autres sommets de la configuration peut être pris comme sommet commun des deux tétraèdres définissant l'hexade. Pour ces dix manières, les tétraèdres de Rosenhain sont respectivement conjugués par rapport aux dix quadriques fondamentales. En conséquence, toutes les hexades contenues dans la configuration de Kummer résultent, si l'on veut, de tétraèdres de Rosenhain conjugués par rapport à une seule et même quadrique fondamentale arbitrairement choisie : elles peuvent être représentées sur *le même diagramme* d'incidence, chacune par six éléments dont trois dans une même ligne ou une même colonne, les trois autres dans des lignes et des colonnes différentes. Il y a donc au total 192 hexades.

L'hexade de Weber possède deux propriétés remarquables : les six points étant placés sur une cubique gauche, on établit aisément que, sur cette courbe, leur situation projective (définie par les paramètres correspondants) est identique à celle des six sommets coplanaires sur leur conique. D'autre part, comme le montre aussitôt le diagramme d'incidence, les six points d'une hexade permettent à eux seuls de construire *linéairement* toute la configuration : par groupes de trois, ils déterminent dix faces qui, à leur tour, déterminent les dix derniers sommets.

Cette construction linéaire est d'ailleurs possible à partir de points quelconques : on peut considérer *six points quelconques* de l'espace P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 comme constituant l'une des hexades de Weber d'une configuration de Kummer. Prenons en effet P_1, P_2, P_3 pour sommets i, j, k d'un tétraèdre de coordonnées et choisissons le quatrième sommet 1 à l'intersection des plans $P_1P_2P_6$, $P_2P_3P_4$, $P_1P_3P_5$. Les six points ont alors pour formule

$$i,\quad j,\quad k,\quad iV,\quad jV',\quad kV''$$

dans laquelle les vecteurs V, V', V'' peuvent être supposés mutuellement orthogonaux, par un choix convenable du point unitaire. Si nous remplaçons ces vecteurs par des produits de quaternions conjugués $Ai\bar{A}$, $Aj\bar{A}$, $Ak\bar{A}$, et si nous effectuons l'homographie ξA, nous obtenons précisément comme expression des six points la forme canonique de l'hexade de Weber.

Les 720 permutations des six points donnent naissance à plusieurs configurations de Kummer. Chaque configuration correspond à 60 permutations puisqu'il y a dix manières de choisir le tétraèdre de Rosenhain et, pour chacun

d'eux, six manières de choisir l'ordre des trois premiers sommets. Par conséquent, *à partir de six points quelconques de l'espace, on peut construire linéairement douze configurations de Kummer :* c'est le *théorème de Weber* [12].

Remarque. — Signalons l'existence de deux autres hexades. La première est définie par deux tétraèdres ponctuels de Göpel qui ont un sommet commun, ce sommet étant exclu. Les six points obtenus sont situés deux à deux sur trois droites concourantes, arêtes d'un tétraèdre planaire.

La seconde hexade est définie par deux tétraèdres ponctuels ayant deux sommets communs; les six sommets obtenus permettent de construire linéairement la moitié de la configuration.

5° Par application du principe de dualité, on déduit aisément les propriétés corrélatives des précédentes concernant les hexades de plans, les quadriques tangentes à douze faces de la configuration, etc.

22. *Configurations de Kummer mutuellement inscrites.* — Donnons-nous une configuration de Kummer JAJ′ rapportée à un tétraèdre fondamental. Multiplions-la (à droite par exemple) par un vecteur V, ce qui revient à la transformer par polarité par rapport à un complexe linéaire. Le produit

$$JAJ'V$$

est une configuration semblable, inscrite et circonscrite à la première. Les deux figures constituent une configuration du type 32_7.

En remplaçant V par deux ou trois vecteurs orthogonaux V, V′, V″, nous obtenons pareillement plusieurs configurations de Kummer mutuellement inscrites et circonscrites

$$JAJ',\quad JAJ'V,\quad JAJ'V',\quad JAJ'V''$$

dont l'addition, partielle ou totale, engendre une configuration du type 32_7, 48_8 ou 64_9.

Considérons notamment la *configuration totale* 64_9. Pour lui donner une expression plus symétrique remplaçons les trois vecteurs orthogonaux par leurs valeurs usuelles $Bi\mathrm{B}$, $Bj\mathrm{B}$, $Bk\mathrm{B}$, puis effectuons le changement de coordonnées $\xi\mathrm{B}$. La configuration prend la forme

$$JAJ'BJ'',$$

où J, J′, J″ désignent des unités quelconques. Elle est représentée par un diagramme d'incidence parallélépipédique (cubique) et peut être considérée, de *trois manières différentes*, comme un ensemble de quatre configurations de Kummer mutuellement inscrites. Une de ces manières

$$JABJ'',\quad JAiBJ',\quad JAjBJ'',\quad JAkBJ''$$

correspond à quatre configurations de Kummer possédant les *mêmes tétraèdres fondamentaux*. On peut donc obtenir la figure totale en appliquant les polarités

d'un système involutif de six complexes et dix quadriques à un tétraèdre conjugué par rapport à l'une de ces quadriques. La configuration est régulière, mais non homographiquement régulière.

Considérons neuf points coplanaires de la configuration 6_4, par exemple ceux du plan AB (1). Ils déterminent trois triangles

$$1AB, \quad \Lambda 1B, \quad AB1 \qquad (1 = i, j, k)$$

conjugués par rapport à la quadrique de base et, par suite, inscriptibles deux à deux dans la même conique : groupés par six, les points déterminent donc trois coniques harmoniquement circonscrites à une même conique. Les neuf points définissent aussi une cubique plane; on peut montrer, par une représentation paramétrique uniforme de la courbe, que les sommets de chaque triangle sont les trois points de contact d'une conique tritangente. Si la cubique possède un point double, les conjugués paramétriques des neuf points (qu'on obtient en prenant les conjugués harmoniques de leurs paramètres par rapport à ceux du point double) sont des points alignés par trois sur la courbe.

Signalons que toute la configuration 6_4 peut être construite *linéairement* à partir de neuf de ses sommets convenablement choisis, tels que

$$AB, \quad AB\,i, \quad A\,i\,B, \quad A\,j\,B, \quad i\,AB\,i, \quad i\,AB\,j, \quad i\,A\,j\,B, \quad j\,A\,i\,B, \quad k\,A\,i\,B;$$

toutefois, la configuration dépendant de 21 paramètres, ces neuf points ne sont pas indépendants et ne peuvent être choisis arbitrairement dans l'espace.

2° Réunissons deux, trois ou quatre configurations 6_4 mutuellement inscrites. Le résultat est une configuration du type 128_{10}, 192_{11} ou 256_{12}.

La configuration 256_{12} possède un diagramme d'incidence parallélépipédique à quatre dimensions et, par suite d'un raisonnement identique, correspond à la formule

$$JAJ'BJ''CJ'''.$$

Elle peut être considérée, de quatre manières différentes, comme un ensemble de quatre configurations 6_4. Douze points coplanaires quelconques sont les sommets de quatre triangles conjugués par rapport à une même conique. Si par ces douze points on fait passer une quartique de genre 1 (2), les sommets des triangles sont les points de contact de coniques tritangentes à la quartique.

D'une manière générale, la configuration harmonique

$$J_1 A_1 J_2 A_2 \ldots A_{n-1} J_n$$

est du type 4^n_{3n}. Elle est régulière (non homographiquement) et son diagramme d'incidence est un parallélépipède à n dimensions. On peut la considérer, de n manières différentes, comme un ensemble de quatre configurations 4^{n-1}_{3n-3}.

(1) Pour passer aux autres plans il suffit de remplacer A et B par les quaternions associés.

(2) Ou même une quartique quelconque de genre 2.

mutuellement inscrites et circonscrites. Les points coplanaires, sommets de n triangles conjugués par rapport à une même conique, peuvent être placés sur une courbe du premier genre de degré n, aux points de contact de n coniques tritangentes à la courbe.

23. *Configuration de Klein.* — La configuration de Klein est la figure formée par les *quinze tétraèdres fondamentaux* d'une configuration de Kummer ou d'un système involutif de dix quadriques [10]. Ce sont donc les tétraèdres de coordonnées qui donnent la forme canonique JAJ' à la configuration de Kummer, et la formule $J\xi J'$ aux dix quadriques ou aux homographies du groupe G_{16} correspondant.

De préférence nous utiliserons le système involutif des dix quadriques. Comme celui-ci, la configuration de Klein la plus générale de l'espace dépend de quinze paramètres.

Choisissons l'un des tétraèdres fondamentaux comme tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$, conjugué par rapport à l'une des quadriques considérée comme quadrique de base. Nous avons noté (n° 14) que dans tout tétraèdre fondamental deux couples d'arêtes opposées sont génératrices communes de deux quadriques du système. Cette remarque, qui a déjà donné le nombre des tétraèdres, permet aussi de déterminer l'expression des sommets et faces de la configuration

$$J,\quad J\pm J',\quad J\pm\varepsilon J',\quad 1\pm i\pm j\pm k,\quad J\pm J'\pm\varepsilon J''\pm\varepsilon J''',$$

les J désignant des unités quelconques et ε un scalaire dont le carré vaut -1.

Les quinze tétraèdres, et aussi bien leurs soixante éléments, jouent un rôle symétrique. En effet, on peut prendre n'importe quel tétraèdre fondamental comme tétraèdre de référence qui donne au système involutif la forme canonique et, d'autre part, on peut permuter arbitrairement les sommets de ce tétraèdre. Il en résulte que la configuration est *régulière*, puisque les soixante sommets ou faces sont similaires. Elle est *harmonique* de dix manières puisque le tétraèdre $\mathfrak{T}$, et par suite tous les autres, sont autopolaires par rapport aux dix quadriques. Enfin elle est du *type* 60_{15} puisque l'une des faces, par exemple le plan 1, contient quinze sommets

$$i,\quad j,\quad k,\quad i\pm j,\quad j\pm k,\quad k\pm i,\quad i\pm\varepsilon j,\quad j\pm\varepsilon k,\quad k\pm\varepsilon i,$$

et, corrélativement, chaque sommet appartient à quinze faces.

Les homographies du groupe G_{16} conservant chaque quadrique, conservent aussi chaque tétraèdre puisque les arêtes sont des génératrices communes. Or, ces transformations reviennent à remplacer tout quaternion (ou élément) par l'un quelconque de ses associés. Il en résulte cette autre définition de la figure, d'un caractère purement arithmétique : *la configuration de Klein est représentée par les 60 quaternions qui ne possèdent seulement que quatre associés chacun : quatre quaternions associés correspondent au même tétraèdre fondamental.*

Il suffit donc de quinze quaternions pour représenter toute la configuration

$$1, \quad \rho, \quad \bar{\rho}, \quad 1+i', \quad 1+\varepsilon i', \quad 1+i'+\varepsilon j'+\varepsilon k', \quad 1-i'+\varepsilon j'+\varepsilon k',$$

où, i', j', k' désignent une permutation circulaire des unités i, j, k; chaque tétraèdre est alors représenté par l'un de ses sommets.

Dans la formule précédente, les quatre premiers quaternions, six par permutation, ont une norme non nulle et leurs associés peuvent être considérés comme des associés à droite. Les six tétraèdres correspondants peuvent donc s'écrire

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\rho, \quad \mathfrak{T}\bar{\rho}, \quad \mathfrak{T}(1+i), \quad \mathfrak{T}(1+j), \quad \mathfrak{T}(1+k).$$

Ils sont conjugués par rapport à la quadrique de base et constituent une configuration desmique 24_9. Les trente-six sommets des autres tétraèdres sont alignés par six sur des génératrices de la quadrique de base et, en même temps, sont situés sur les arêtes des six premiers tétraèdres. Nous obtenons ainsi la construction géométrique suivante :

Étant donnée une configuration desmique 24_9, comprenant six tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique, les intersections des dix-huit arêtes avec la quadrique et les plans tangents menés par ces mêmes arêtes déterminent une configuration inscrite 36_{11} qui, avec la configuration donnée, forme une configuration de Klein.

Considérons l'un des tétraèdres, $\mathfrak{T}$ par exemple. Il est conjugué par rapport aux quatre quadriques fondamentales $J\xi J$, à chacune desquelles correspondent six tétraèdres conjugués formant une configuration desmique 24_9. Inversement, comme nous le préciserons au numéro suivant, deux quelconques des quadriques admettent deux tétraèdres conjugués communs. Il en résulte cette propriété (*cf.* n^{os} 16, 18) :

De la configuration de Klein on peut extraire dix configurations desmiques 24_9. Chaque tétraèdre appartient à quatre d'entre elles qui ont deux à deux un nouveau tétraèdre commun et qui, par conséquent, contiennent la totalité des quinze tétraèdres. Deux tétraèdres quelconques de la figure sont donc desmiques ou en liaison harmonique.

Sur chaque arête de tétraèdre se trouvent six sommets formant trois couples en *division harmonique* mutuelle, par exemple

$$1, \quad i, \quad 1 \pm i, \quad 1 \pm \varepsilon i.$$

Corrélativement, chaque arête est située dans six faces formant des faisceaux harmoniques. Deux arêtes opposées d'un tétraèdre appartiennent donc à deux nouveaux tétraèdres en liaison harmonique avec le premier. Par suite, *chaque tétraèdre fondamental est en liaison harmonique avec six autres et en liaison desmique avec les huit derniers.*

Enfin, puisque tout tétraèdre fait partie de quatre systèmes desmiques, par un sommet quelconque de la configuration on peut mener seize droites, distinctes des arêtes, contenant chacune deux nouveaux sommets (n° 17). Le nombre total de ces droites est 320. Corrélativement, dans chaque face se trouvent seize droites qui sont chacune l'intersection de deux nouvelles faces.

24. *Permutation des tétraèdres fondamentaux.* — 1° *Le groupe des homographies* conservant globalement les dix quadriques d'un système involutif conserve aussi la configuration de Klein correspondante en permutant les tétraèdres fondamentaux [23].

Ce groupe contient le sous-groupe des homographies propres et impropres qui conservent l'une des quadriques choisie comme quadrique de base

$$\mathrm{K}\xi\mathrm{K}', \quad \mathrm{K}\bar{\xi}\mathrm{K}'.$$

K et K′ désignant des quaternions entiers quelconques de norme 1, 2 ou 4; ces 1152 homographies permettent de transformer une quadrique quelconque du système en une autre, à l'exclusion de la quadrique de base. Pour obtenir les homographies du groupe total, il suffit de considérer neuf homographies particulières transformant la quadrique de base en chacune des neuf autres quadriques, et de les composer avec toutes les transformations du sous-groupe précédent.

L'ensemble des homographies conservant le système involutif de quadriques (et la configuration de Klein) constitue donc un groupe fini d'ordre 11520 ou $48^2 . 5$. Si l'on ajoute les corrélations correspondantes, on obtient naturellement un groupe d'ordre double.

Précisons davantage et faisons appel à certaines homographies particulières : les *transformations affines* qui, en conservant le tétraèdre de coordonnées $\mathfrak{T}$, font passer de la quadrique de base à chacune des trois quadriques $1\xi 1$ qui admettent $\mathfrak{T}$ comme tétraèdre conjugué commun. Nous désignerons ces trois transformations par des indices i, j, k : l'homographie ξ_i relative à la multiplication des deuxième et quatrième coordonnées (¹) par le scalaire ε

$$\xi_i = x + \varepsilon y i + z j + \varepsilon t k$$

transforme la quadrique de base en la quadrique $j\xi j$; les homographies ξ_j et ξ_k, obtenues par permutation circulaire de i, j, k et de y, z, t, la transforment respectivement en les quadriques $k\xi k$ et $i\xi i$. Avec ces notations, toutes les homographies qui transforment la quadrique de base en quadrique $j\xi j$ ont pour formule

$$(\mathrm{K}\xi\mathrm{K}')_i, \quad (\mathrm{K}\bar{\xi}\mathrm{K}')_i.$$

Par multiplication à droite par ρ ou $\bar{\rho}$, on déduit celles qui la transforment en quadrique $i\xi k$ ou $i\bar{\xi}j$.

(¹) Cette notation est intentionnellement dyssymétrique.

En définitive, le groupe des $48^2.5$ homographies lié au système involutif et à la configuration de Klein peut s'écrire

$$K\Xi K',\quad K\overline{\Xi}K',\quad (K\Xi K')_1 L,\quad (K\overline{\Xi}K')_1 L,$$

l'indice I représentant l'une des transformations affines relatives à i, j, k, et L désignant l'un des quaternions du groupe cyclique $1, \rho, \overline{\rho}$.

2° *Application à la configuration de Kummer.* — Supposons une configuration de Kummer rapportée à l'un de ses tétraèdres fondamentaux, c'est-à-dire mise sous la forme canonique particulière JAJ'. Recherchons les diverses expressions canoniques que prend cette configuration lorsqu'on la rapporte successivement à chacun des quinze tétraèdres fondamentaux et que pour chacun d'eux, par déplacement du point unitaire, on effectue toutes les permutations et changements de signe des coordonnées. Ces opérations équivalent aux $48^2.5$ homographies conservant l'ensemble des quinze tétraèdres. Les diverses formes canoniques de la configuration de Kummer s'écrivent donc

$$KJAJ'K',\quad KJ\overline{AJ'}K',\quad (KJAJ'K')_1 L,\quad (KJ\overline{AJ'}K')_1 L.$$

Abstraction faite de l'ordre des éléments, elles se déduisent de la forme particulière JAJ' par substitution au quaternion A de l'un des $48^2.5$ quaternions

$$KAK',\quad K\overline{A}K',\quad (KAK')_1 L,\quad (K\overline{A}K')_1 L.$$

Par rapport à des tétraèdres de coordonnées absolument quelconques, les dernières formules définissent 720 configurations de Kummer *projectivement équivalentes*. Si l'on rapporte celles-ci à un seul et même tétraèdre de référence, la figure totale constitue une configuration harmonique de 11 520 éléments sur laquelle nous reviendrons.

3° *Application à la configuration de Klein.* — Le groupe des $48^2.5$ homographies permet de passer d'un tétraèdre fondamental quelconque à un autre, et même d'un élément quelconque (sommet et face opposée) à un autre : la configuration de Klein est donc *homographiquement régulière*.

Parmi toutes les homographies du groupe, choisissons les plus simples qui suffisent à transformer le tétraèdre de référence $\mathfrak{S}$ en chacun des quinze tétraèdres fondamentaux. Il y a d'abord les transformations propres

$$\xi,\quad \xi\rho,\quad \xi\overline{\rho},\quad \xi(1+i),\quad \xi(1+j),\quad \xi(1+k)$$

qui, appliquées à $\mathfrak{S}$, donnent les six tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique de base; afin de condenser encore les formules, nous y remplacerons les trois dernières parenthèses par $\sqrt{i}$, $\sqrt{j}$, $\sqrt{k}$. Il y a ensuite les transformations affines ξ_1, ξ_j, ξ_k, qui, appliquées aux six tétraèdres précédents, donnent les neuf derniers tétraèdres de la configuration. De cette manière, nous pouvons

représenter la totalité des tétraèdres fondamentaux par les seules formules

$$\mathfrak{T},\quad \mathfrak{T}_\rho,\quad \mathfrak{T}_{\bar\rho},\quad \mathfrak{T}\sqrt{1},\quad (\mathfrak{T}_\rho)_1,\quad (\mathfrak{T}_{\bar\rho})_1,\quad (\mathfrak{T}\sqrt{1})_1,$$

I désignant comme d'habitude l'une des unités i, j, k.

Utilisons cette notation pour déterminer les dix configurations desmiques contenues dans la configuration de Klein. Appliquons d'abord les homographies ξ_1 aux six tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique de base. Nous obtenons les quatre configurations desmiques $2\{_3$ dont fait partie le tétraèdre de référence et qui contiennent au total les quinze tétraèdres fondamentaux

$$\begin{array}{lllll}
\mathfrak{T} & \mathfrak{T}_\rho & \mathfrak{T}_{\bar\rho}\ , & \mathfrak{T}\sqrt{i} & \mathfrak{T}\sqrt{j} \quad \mathfrak{T}\sqrt{k} \\
\mathfrak{T} & (\mathfrak{T}_\rho)_i & (\mathfrak{T}_{\bar\rho})_i, & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i & \mathfrak{T}\sqrt{j} \quad (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k \\
\mathfrak{T} & (\mathfrak{T}_\rho)_j & (\mathfrak{T}_{\bar\rho})_j; & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i & (\mathfrak{T}\sqrt{j})_j \quad \mathfrak{T}\sqrt{k} \\
\mathfrak{T} & (\mathfrak{T}_\rho)_k & (\mathfrak{T}_{\bar\rho})_k, & \mathfrak{T}\sqrt{i} & (\mathfrak{T}\sqrt{j})_j \quad (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k
\end{array}$$

où, dans chaque ligne, la virgule sert à séparer deux systèmes desmiques de trois tétraèdres.

Les six autres configurations desmiques peuvent être considérées comme les transformées de la première par les homographies $\xi_1\rho$ et $\xi_1\bar\rho$. Elles s'écrivent

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{T}_\rho & (\mathfrak{T}_{\bar\rho})_j & (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k, & (\mathfrak{T}_\rho)_i \quad \mathfrak{T}\sqrt{k} \quad (\mathfrak{T}_\rho)_k \\
\mathfrak{T}_\rho & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i & (\mathfrak{T}_\rho)_k\ , & (\mathfrak{T}_{\bar\rho})_j \quad \mathfrak{T}\sqrt{i} \quad (\mathfrak{T}_{\bar\rho})_i
\end{array}$$

avec les expressions analogues obtenues par permutation circulaire de i, j, k.

Le tableau des quatre configurations desmiques qui contiennent $\mathfrak{T}$ permet de vérifier aussitôt la propriété énoncée précédemment. Le tétraèdre $\mathfrak{T}$ est desmique avec les huit tétraèdres figurant à gauche de la virgule, et il est en liaison harmonique avec les six tétraèdres figurant à droite. En outre deux des quatre configurations desmiques ont deux tétraèdres communs. Les mêmes propriétés sont valables pour tout autre tétraèdre fondamental et pour les autres couples de configurations desmiques, en raison du rôle symétrique des tétraèdres et de celui des quadriques fondamentales.

25. *Configurations extraites de la configuration de Klein.* — Parmi les quinze tétraèdres fondamentaux, recherchons les figures de n tétraèdres tels que chacun d'eux soit en liaison desmique avec p autres, et en liaison harmonique avec les $n-p-1$ tétraèdres restants. Une telle figure constitue une configuration harmonique de dix manières, puisqu'elle est autopolaire par rapport aux dix quadriques du système involutif. Elle comprend $4n$ faces dont chacune contient $2(n-p-1)+3$ sommets, et réciproquement par corrélation; elle est donc du type

$$4_{n}\,n_{2n+1-2p}.$$

L'obtention de toutes les figures possibles résulte d'un raisonnement exhaustif assez long, que nous ne reproduirons pas ici, où des remarques de détail viennent réduire notablement les calculs. Disons seulement que le cas $p=7$ est impossible, que $p=6$ entraîne que n soit égal à 10 ou à 12, que $n-p=5$ ne peut avoir lieu que si n égale 9. La liste complète que nous donnons ci-après comprend d'abord les configurations autopolaires inscrites, plus faciles à déterminer puisque neuf tétraèdres fondamentaux sont inscriptibles dans la même quadrique :

Configuration autopolaire inscrite 36_{11}, représentable par un diagramme carré. Chacun des neuf tétraèdres est desmique avec quatre autres et en liaison harmonique avec les quatre derniers. La configuration inscrite dans la quadrique de base peut s'écrire

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}\rho)_i & (\mathfrak{S}\rho)_j & (\mathfrak{S}\rho)_k \\ (\mathfrak{S}\bar{\rho})_l & (\mathfrak{S}\rho)_j & (\mathfrak{S}\bar{\rho})_k \\ (\mathfrak{S}\sqrt{j})_j & (\mathfrak{S}\sqrt{k})_k & (\mathfrak{S}\sqrt{i})_l \end{array}$$

où les tétraèdres de ce tableau, s'ils sont desmiques, figurent dans la même ligne ou la même colonne. La configuration de Klein contient dix configurations 36_{11} respectivement inscrites dans les dix quadriques fondamentales.

Configurations autopolaires inscrites 24_9, 24_7, 16_5, extraites de la configuration 36_{11} et se déduisant successivement du tableau ci-dessus par suppression d'une diagonale, d'une ligne ou d'une colonne, d'une ligne et d'une colonne.

Configuration 16_7 *ou configuration de Kummer inscrite*, dont les quatre tétraèdres forment deux couples desmiques en liaison harmonique. On la déduit du tableau des neuf tétraèdres en supprimant par exemple les diagonales. Un autre exemple simple est donné par

$$\mathfrak{S} \quad \mathfrak{S}\rho, \quad \mathfrak{S}\sqrt{i} \quad \mathfrak{S}\sqrt{j}.$$

Configurations autopolaires inscrites 8_5, 12_7, formées par deux ou trois tétraèdres en liaison harmonique mutuelle, par exemple

$$\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S}\sqrt{i}, \quad (\mathfrak{S}\sqrt{i})_i.$$

Leurs sommets sont alignés sur deux génératrices d'une quadrique fondamentale et leurs faces sont les plans tangents en ces points. La configuration de Klein contient quinze configurations 12_7.

Configurations autopolaires inscrites 8_3, 12_3, formées par deux ou trois tétraèdres mutuellement desmiques et appartenant à une même configuration inscriptible 36_{11} (ligne ou colonne du tableau des neuf tétraèdres).

Configuration 12_3 non inscriptible dans une quadrique, système desmique de trois tétraèdres tels que

$$\mathfrak{S} \quad \mathfrak{S}\rho \quad \mathfrak{S}\bar{\rho}.$$

Configurations 16_3, 20_3, qui prolongent la configuration inscriptible 12_3 pour former quatre ou cinq tétraèdres mutuellement desmiques, par exemple

$$\mathfrak{S} \quad \mathfrak{S}\overline{\rho} \quad (\mathfrak{S}\rho)_i \quad (\mathfrak{S}\rho)_j \quad (\mathfrak{S}\rho)_k.$$

Trois quelconques de ces tétraèdres sont inscrits dans une même quadrique fondamentale. La configuration de Klein donne naissance à six configurations 20_3, dans chacune desquelles deux tétraèdres suffisent à déterminer les trois autres.

Configuration 20_7, constituée par une chaîne de cinq tétraèdres desmiques de proche en proche : chacun d'eux, desmique avec deux autres, est en liaison harmonique avec les deux derniers. Ainsi

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S} & \mathfrak{S}\rho & \\ & (\mathfrak{S}\sqrt{i})_i & \mathfrak{S}\sqrt{j} \\ & & (\mathfrak{S}\rho)_j \quad \mathfrak{S}. \end{array}$$

Configuration desmique 24_9, déjà étudiée, formée par trois tétraèdres desmiques, en liaison harmonique avec trois autres tétraèdres desmiques. C'est la figure complémentaire d'une configuration 36_{11} autopolaire inscrite (qu'elle complète pour former la configuration de Klein).

Configuration 24_3, ensemble des six tétraèdres en liaison harmonique avec l'un des tétraèdres fondamentaux, par exemple

$$\mathfrak{S}\sqrt{i}, \quad \mathfrak{S}\sqrt{j}, \quad \mathfrak{S}\sqrt{k}, \quad (\mathfrak{S}\sqrt{i})_i, \quad (\mathfrak{S}\sqrt{j})_j, \quad (\mathfrak{S}\sqrt{k})_k.$$

Chaque tétraèdre est desmique avec quatre autres et en liaison harmonique avec le tétraèdre restant.

Configuration 32_9, ensemble des huit tétraèdres desmiques avec un même tétraèdre fondamental, par exemple

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{S} & (\mathfrak{S}\rho)_i & (\mathfrak{S}\rho)_j & (\mathfrak{S}\rho)_k \\ \mathfrak{S}\rho & (\mathfrak{S}\sqrt{j})_j & (\mathfrak{S}\sqrt{k})_k & (\mathfrak{S}\sqrt{i})_i. \end{array}$$

Chaque tétraèdre est desmique avec quatre autres de l'ensemble.

Configuration 36_{11} *non inscriptible* dans une quadrique, complémentaire d'une configuration 24_9 autopolaire inscrite. Ainsi

$$\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S}\rho, \quad \mathfrak{S}\rho, \quad \mathfrak{S}\sqrt{i}, \quad \mathfrak{S}\sqrt{j}, \quad \mathfrak{S}\sqrt{k}, \quad (\mathfrak{S}\rho)_i, \quad (\mathfrak{S}\overline{\rho})_j, \quad (\mathfrak{S}\sqrt{i})_i.$$

Chacun des neuf tétraèdres, desmique avec quatre autres, est en liaison harmonique avec les quatre derniers.

Configuration 40_9, complémentaire d'une configuration 20_7. On peut aussi la considérer comme la somme de configurations 16_3 et 24_3 convenablement choisies.

Configuration 48_{13}, complémentaire de l'une des quinze configurations 12_7.

Configuration de Klein 60_{15}, qui englobe évidemment toutes les précédentes, et pour laquelle nous indiquerons, en terminant, les diverses relations desmiques entre tétraèdres. Dans le tableau ci-après, le plus simple du genre, deux tétraèdres desmiques quelconques figurent au moins une fois dans la même ligne ou dans la même colonne, en sorte que chacun d'eux soit desmique avec huit autres :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{S} & \mathfrak{S}_{\bar{\rho}} & (\mathfrak{S}_{\rho})_i & (\mathfrak{S}_{\rho})_j & (\mathfrak{S}_{\rho})_k \\
\mathfrak{S} & \mathfrak{S}_{\rho} & (\mathfrak{S}_{\bar{\rho}})_i & (\mathfrak{S}_{\bar{\rho}})_j & (\mathfrak{S}_{\bar{\rho}})_k \\
 & (\mathfrak{S}_{\backslash \bar{i}})_i & \mathfrak{S}_{\backslash \bar{k}} & \mathfrak{S}_{\backslash j} & \mathfrak{S}_{\backslash \bar{k}} \\
 & (\mathfrak{S}_{\backslash \bar{j}})_j & (\mathfrak{S}_{\backslash \bar{j}})_j & (\mathfrak{S}_{\backslash k})_k & (\mathfrak{S}_{\backslash i})_i \\
 & (\mathfrak{S}_{\backslash \bar{k}})_k & \mathfrak{S}_{\backslash \bar{i}} & \mathfrak{S}_{\backslash \bar{i}} & \mathfrak{S}_{\backslash \bar{j}}.
\end{array}$$

Les colonnes et les deux premières lignes de ce tableau résultent immédiatement de la détermination des six configurations 20_3 contenues dans la configuration de Klein.

26. *Configurations de Kummer homologiques.* — 1° Considérons d'abord les deux configurations de Kummer ayant pour formules

$$JAJ', \quad J\bar{A}J'.$$

Elles admettent les mêmes tétraèdres fondamentaux, dont le tétraèdre de référence $\mathfrak{S}$. En outre, elles sont involutivement homologiques de quatre manières, les centres et les plans d'homologie étant les sommets et les faces opposées du tétraèdre $\mathfrak{S}$: par exemple les sommets JAJ′ et iJ′$\bar{A}$Ji sont homologiques par rapport au point et au plan i.

Nous dirons que les configurations précédentes sont *homologiques par rapport au tétraèdre fondamental* $\mathfrak{S}$. Leurs tétraèdres de Rosenhain ou de Göpel, leurs hexades de Weber sont respectivement homologiques. Ceux de leurs tétraèdres de Göpel qui sont desmiques avec le tétraèdre $\mathfrak{S}$ sont aussi respectivement desmiques : les deux tétraèdres

$$JAJ, \quad JAJ \qquad (J = 1, i, j, k)$$

sont desmiques entre eux, et il en est de même des trois couples obtenus par substitution au quaternion A de ses associés à droite iA, jA, kA.

2° Cherchons la condition que doivent vérifier A et A_1 pour que les configurations de Kummer correspondantes

$$JAJ', \quad JA_1J'$$

soient homologiques par rapport à un tétraèdre fondamental autre que $\mathfrak{S}$, par exemple $\mathfrak{S}_{\backslash \bar{i}}$. L'homographie $\xi(1 - i)$ transforme le tétraèdre $\mathfrak{S}_{\backslash \bar{i}}$ en $\mathfrak{S}$, et rend les configurations homologiques par rapport au tétraèdre de référence. Il s'ensuit immédiatement que l'élément A_1, ou l'un de ses associés,

a pour expression

$$A_1 = (1+i)\overline{A}(1+i),$$

ce qui fait que A et A_1 ont les mêmes coordonnées à l'ordre et au signe près

$$A = x_0 + y_0 i + z_0 j + t_0 k, \qquad A_1 = x_0 + y_0 i + t_0 j + z_0 k.$$

Une permutation circulaire des coordonnées donne aussitôt la formule des configurations homologiques par rapport à $\mathfrak{T}\sqrt{j}$ et $\mathfrak{T}\sqrt{k}$.

Un raisonnement analogue conduit aux configurations homologiques de JAJ' par rapport à l'un quelconque des autres tétraèdres fondamentaux, par exemple

$$(\mathfrak{T}\sqrt{i})_i, \quad \mathfrak{T}\rho, \quad \mathfrak{T}\overline{\rho}, \quad (\mathfrak{T}\rho)_i, \quad (\mathfrak{T}\overline{\rho})_i.$$

Ces nouvelles configurations JA_2J', JA_3J', ..., JA_6J' sont respectivement définies par les quaternions

$$A_2 = [(1+i)\overline{A}_i(1+i)]_i, \qquad A_3 = \rho\overline{A}\rho,$$
$$A_4 = \overline{\rho}\overline{A}\overline{\rho}, \qquad A_5 = (\rho\overline{A}_i\rho)_i, \qquad A_6 = (\overline{\rho}\overline{A}_i\overline{\rho})_i$$

qui s'écrivent encore, au produit près par une unité,

$$A_2 = x_0 + y_0 i + \varepsilon t_0 j - \varepsilon z_0 k,$$
$$A_3 = -x_0 + y_0 + z_0 + t_0 + (x_0 - y_0 + z_0 + t_0)i + (x_0 + y_0 - z_0 + t_0)j + (x_0 + y_0 + z_0 - t_0)k,$$
$$A_4 = x_0 + y_0 + z_0 + t_0 + (x_0 + y_0 - z_0 - t_0)i + (x_0 - y_0 + z_0 - t_0)j + (x_0 - y_0 - z_0 + t_0)k,$$
$$A_5 = -x_0 + y_0 + \varepsilon z_0 + \varepsilon t_0 + (x_0 - y_0 + \varepsilon z_0 + \varepsilon t_0)i + (\varepsilon x_0 + \varepsilon y_0 + z_0 - t_0)j + (\varepsilon x_0 + \varepsilon y_0 - z_0 + t_0)k,$$
$$A_6 = x_0 + y_0 + \varepsilon z_0 + \varepsilon t_0 + (x_0 + y_0 - \varepsilon z_0 - \varepsilon t_0)i + (\varepsilon x_0 - \varepsilon y_0 - z_0 + t_0)j + (\varepsilon x_0 - \varepsilon y_0 + z_0 - t_0)k.$$

3° Nous venons de voir, sur l'expression de A_1, que deux configurations de Kummer homologiques par rapport à l'un des trois tétraèdres $\mathfrak{T}\sqrt{I}$ se déduisent l'une de l'autre par l'échange de deux coordonnées convenablement choisies.

Considérons alors la formule, prise avec un nombre pair de signes moins,

$$x \pm yi \pm zj \pm tk,$$

où x, y, z, t désignent une permutation quelconque des coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0. Elle représente 96 éléments formant un système de *six configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *trois* autres, par rapport aux tétraèdres fondamentaux respectifs $\mathfrak{T}\sqrt{I}$. Les centres et les plans d'homologie constituent donc un système desmique de trois tétraèdres.

Complétons la figure précédente en lui adjoignant les configurations homologiques par rapport au tétraèdre $\mathfrak{T}$, ce qui revient à changer le signe d'une coordonnée supplémentaire. Nous obtenons un total de 192 éléments représentés par la même formule

$$x \pm yi \pm zj \pm tk$$

prise avec tous les signes possibles. Cette figure comprend *douze configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *quatre* autres, par rapport aux

tétraèdres respectifs $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$. Les trois tétraèdres fondamentaux $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$, mutuellement desmiques, sont en liaison harmonique avec le quatrième $\mathfrak{T}$. Les résultats sont manifestement analogues si l'on remplace ces tétraèdres par quatre autres projectivement équivalents.

On peut dire, dans le même ordre d'idées, que le groupe des 192 homographies correspondant aux permutations et changements de signe des coordonnées (n° 7), et dont fait partie le groupe G_{16}, résulte, par multiplications successives et répétées, de seize homologies involutives définies par les sommets et les faces opposées de quatre tétraèdres fondamentaux convenablement choisis.

Faisons intervenir maintenant les tétraèdres $(\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}})_1$. Quoique mutuellement desmiques, ils ne sont pas projectivement équivalents aux tétraèdres $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$ puisque, contrairement à ces derniers, ils sont inscriptibles dans une même quadrique et peuvent être intégrés dans un groupe de cinq tétraèdres mutuellement desmiques. Partant de la configuration de Kummer JAJ', construisons alors, successivement *de proche en proche*, les figures homologiques par rapport aux trois tétraèdres

$$(\mathfrak{T}\sqrt{i})_1, \quad (\mathfrak{T}\sqrt{j})_1, \quad (\mathfrak{T}\sqrt{i})_1.$$

Nous aboutissons à une configuration qui est homologique de JAJ' par rapport au tétraèdre $\mathfrak{T}\sqrt{k}$. Il en résulte que, par multiplications successives, les homologies involutives définies par les sommets et les faces opposées des six tétraèdres $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$ et $(\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}})_1$ engendrent un groupe fini. La formule correspondante

$$x + \eta y i + \eta' z j + \eta'' t k \qquad (\eta\eta'\eta'' = 1)$$

où chaque η désigne un scalaire quelconque de carré ± 1, représente un système de 24 *configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *six* autres, par rapport aux tétraèdres respectifs $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$ et $(\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}})_1$. Bien entendu, ces six tétraèdres fondamentaux, qui forment une configuration 24_6, peuvent être remplacés par un ensemble équivalent tel que $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$, $(\mathfrak{T}\rho)_1$.

Quant à la même formule prise avec

$$\eta\eta'\eta'' = \pm 1,$$

elle représente un système de 48 *configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *sept* autres, par rapport aux tétraèdres respectifs $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$ $(\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}})_1$ dont le premier $\mathfrak{T}$ est en liaison harmonique avec les six autres. On étudierait de même les configurations homologiques par rapport à des ensembles de sept tétraèdres fondamentaux ayant la même situation relative et, de ce fait, projectivement équivalents aux précédents, par exemple $\mathfrak{T}\rho$, $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$, $(\mathfrak{T}\rho)_1$.

Tous ces groupements de configurations font visiblement partie de la figure totale des configurations de Kummer possédant les mêmes tétraèdres fonda-

mentaux et projectivement équivalentes (n° 24) : c'est là un ensemble de 720 *configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *quinze* autres par rapport aux quinze tétraèdres fondamentaux, respectivement.

Parallèlement, on peut dire que le groupe des 11520 homographies conservant la configuration de Klein résulte, par multiplications successives, des *soixante homologies involutives* dont les centres et les plans d'homologie sont les sommets et les faces opposées des quinze tétraèdres de la configuration.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE ET HISTORIQUE.

[1]. J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822, p. 409.
[2]. M. Chasles, *Ann. math. pures appl.*, **19**, 1828, p. 65.
[3]. A. F. Möbius, *J. f. Math.*, **3**, 1828, p. 273; *Werke*, **1**, p. 437.
[4]. O. Rodrigues, *J. math. pures appl.*, **5**, 1840, p. 405.
[5]. L. O. Hesse, *J. f. Math.*, **20**, 1840, p. 297; *Werke*, p. 39.
[6]. O. Hermes, *J. f. Math.*, **56**, 1859, p. 218.
[7]. E. Kummer, *Berliner Monatsberichte*, 1864, p. 247.
[8]. P. Serret, *Géométrie de direction*, Paris, 1869, p. 132, 181, 317.
[9]. C. Jordan, *J. f. Math.*, **70**, 1869, p. 182.
[10]. F. Klein, *Math. Ann.*, **2**, 1870, p. 198, 212; **4**, 1871, p. 356; **23**, 1884, p. 539.
[11]. A. Cayley, *J. f. Math.*, **83**, 1877, p. 210; *Papers*, **10**, p. 157.
[12]. H. Weber, *J. f. Math.*, **84**, 1878, p. 332.
[13]. C. Stephanos, *Bull. sc. math.*, (2), **3**, 1879, p. 424.
[14]. Th. Reye, *J. f. Math.*, **86**, 1879, p. 84, 209.
[15]. Th. Reye, *Acta math.*, **1**, 1882, p. 97.
[16]. D. Montesano, *Ann. Mat. pur. appl.*, (2), **14**, 1886, p. 131.
[17]. H. Schröter, *J. f. Math.*, **100**, 1887, p. 231 ; **109**, 1892, p. 341.
[18]. A. Schœnflies, *Math. Ann.*, **31**, 1888, p. 43.
[19]. R. Sturm, *Liniengeometrie*, **1**, Leipzig, 1892, p. 234, 316.
[20]. S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, **3**, Leipzig, 1893.
[21]. G. Kœnigs, *La géométrie réglée*, Paris, 1895, p. 92.
[22]. J. Feder, *Math. Ann.*, **47**, 1896, p. 375.
[23]. E. Hess, *Nova acta Leop. Carol.*, **55**, 1890, p. 97; **75**, 1899, p. 5.
[24]. V. Martinetti, *Palermo Rend.*, **16**, 1902, p. 196.
[25]. R. Hudson, *Kummer's quartic surface*, Cambridge, 1905.
[26]. G. Darboux. *Principes de géométrie analytique*, Paris, 1917.
[27]. A. Hurwitz, *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Berlin, 1919
[28]. G. B., *Bull. Soc. math. France*, **71**, 1943, p. 78.
[29]. G. B., *Bull. sc. math.*, **68**, 1944, p. 190; *C. R. Acad. Sc.*, **220**, 1945, p. 548, 640.

THÉORIE DE GALOIS

POUR

LES CORPS NON COMMUTATIFS

PAR M. HENRI CARTAN.

Nous nous proposons de généraliser aux corps non commutatifs ce qu'on appelle aujourd'hui la *théorie de Galois* des corps *commutatifs*, c'est-à-dire l'étude des relations entre certains *sous-corps* d'un corps donné K, et certains *groupes d'automorphismes* du corps K. Notre théorie contient en particulier les théorèmes de Skolem-Nœther (1) relatifs aux automorphismes intérieurs d'un corps de rang fini sur son centre, théorèmes qui constituent ce que E. Nœther (2) appelait précisément la « théorie de Galois » des corps non commutatifs (*voir* ci-après, § 9). Mais notre actuelle théorie est plus compréhensive, car elle englobe également les résultats de Jacobson (3) relatifs aux groupes d'automorphismes *extérieurs* d'un corps (commutatif ou non), résultats qui contiennent eux-mêmes comme cas particuliers ceux de la théorie de Galois pour un corps commutatif, sous la forme que leur ont donnée Artin et Baer.

Ainsi les deux théories connues, celles de Skolem-Nœther, et celle de Galois-Artin-Jacobson, apparaissent comme les deux pôles d'une théorie unitaire, celle qui fait l'objet du présent article.

1. *Notions générales sur les corps.* — Nous ne revenons pas sur la notion de *corps* (4). Un *isomorphisme* d'un corps K sur un corps K′ est une application

(1) *Voir* DEURING, *Algebren* (*Ergebnisse*, IV, 1, 1935), p. 42-44. *Voir* aussi VAN DEN WAERDEN, *Moderne Algebra*, II, 2e édition, p. 202-204.

(2) E. NŒTHER, *Nichtkommutative Algebra* (*Math. Zeits.*, 37, 1933, p. 514-541).

(3) *Ann. of Math.*, 41, 1940, p. 1-7.

(4) Nous adoptons la terminologie de N. BOURBAKI [*Algèbre*, Chap. I (*Actual. scient. et ind.*, fasc. 934; Paris, Hermann, 1942)]. Un *corps* (c'est-à-dire un anneau dont l'ensemble des éléments $\neq 0$ forme un groupe pour la multiplication) n'est donc pas nécessairement supposé commutatif.

biunivoque f de K sur K′ telle que l'on ait, pour tout x et tout y de K,

$$f(x-y)=f(x)-f(y), \qquad f(xy)=f(x)f(y),$$

d'où résulte

$$f(0)=0, \qquad f(1)=1, \qquad f(x^{-1})=[f(x)]^{-1}.$$

En particulier, un *automorphisme* d'un corps K est un isomorphisme de K sur K.

La donnée d'un *sous-corps* L d'un corps K définit sur K deux structures d'*espace vectoriel* (5) par rapport au corps L : une structure d'espace vectoriel *à gauche*, pour laquelle le « produit » d'un élément x de K et d'un « scalaire » α de L est l'élément αx de K; une structure d'espace vectoriel *à droite*, pour laquelle le « produit » d'un élément x de K et d'un « scalaire » α de L est l'élément $x\alpha$ de K. On appellera *rang à gauche* de K sur L, la dimension de K comme espace vectoriel à gauche sur L; on définit de même le *rang à droite*. Ces rangs peuvent être infinis, et ils ne sont pas nécessairement égaux. D'une manière générale, soit E une partie quelconque de K; on appellera rang (à gauche) de E sur L la dimension du sous-espace vectoriel (à gauche sur L) engendré par E; on définit de même le rang (à droite) de E sur L.

Si L est le *centre* C de K, c'est-à-dire le sous-corps des éléments qui permutent avec tout élément de K, les deux structures d'espace vectoriel sur C sont identiques; on parlera donc du *rang* (de K, ou d'une partie de K) sur C, sans spécifier s'il s'agit de rang à droite ou de rang à gauche.

Pour qu'un automorphisme f de K soit en même temps un automorphisme pour la structure d'espace vectoriel (à gauche sur un sous-corps L), il faut et il suffit que $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ pour tout $\alpha \in L$, ce qui donne $f(\alpha)=\alpha$ pour tout $\alpha \in L$. Autrement dit, il faut et il suffit que tous les éléments de L soient *invariants* par f. Les automorphismes qui jouissent de cette propriété forment évidemment un *groupe*, que nous noterons G_L^K.

Inversement, soit $\mathcal{G}$ un groupe d'automorphismes du corps K. Les éléments de K invariants par ce groupe (c'est-à-dire invariants par chaque automorphisme du groupe) forment évidemment un *sous-corps* de K. Nous l'appellerons le sous-corps des invariants de $\mathcal{G}$.

Un sous-corps L de K sera dit *galoisien* s'il existe un groupe d'automorphismes $\mathcal{G}$ tel que L soit précisément le sous-corps des invariants de $\mathcal{G}$. Cela revient à dire que L est le sous-corps des invariants du groupe G_L^K, qui prend alors le nom de *groupe de Galois* de K relativement à L. La notion de sous-corps galoisien est relative au surcorps K de L; on dit aussi que K est une *extension galoisienne* de L.

Un sous-corps quelconque L de K étant donné, il existe un plus petit sous-

(5) Pour les notions d'algèbre linéaire, *voir* Bourbaki, *Algèbre*, Chap. II (*Actual. scient. et ind.*, fasc. 1032; Paris, Hermann, 1947).

corps galoisien de K contenant L : c'est le sous-corps des invariants du groupe G_L^K. D'autre part, l'intersection d'une famille quelconque de sous-corps galoisiens L_i de K est un sous-corps galoisien de K, car c'est le sous-corps des invariants du groupe engendré par les automorphismes des groupes G_L^K.

Soit K un corps (commutatif ou non) qui soit de *rang fini* (à gauche) sur un sous-corps L. Alors tout *sous-anneau* de K qui contient L est un *sous-corps*; cela résulte du fait général suivant : si un anneau A, sans diviseur de zéro, contient un *corps* L (commutatif ou non) dont l'élément unité est élement unité de A, et si le rang de A (comme espace vectoriel à gauche sur L) est *fini*, alors A est un *corps* ([6]).

Dans la même hypothèse (K de rang fini sur L), tout isomorphisme de K sur un sous-corps de K, qui laisse invariants les éléments de L, est un isomorphisme de K *sur* K, c'est-à-dire un élément du groupe G_L^K ([7]).

2. *Théorie de Galois pour un corps commutatif.* — Nous voulons, dans ce paragraphe, rappeler quelques points essentiels de la théorie de Galois pour corps *commutatifs*, sous la forme donnée par Artin.

Tout d'abord, en adoptant la définition donnée plus haut d'une extension galoisienne, on a le critère classique :

Pour que K (commutatif) *soit extension galoisienne de* L, *il faut et il suffit que :* 1° *tout polynome à coefficients dans* L, *irréductible sur* L, *et qui possède au moins une racine dans* K, *se décompose dans* K *en un produit de polynomes du premier degré;* 2° dans le cas où la caractéristique p de K est $\neq 0$, *tout élément de* K *dont la puissance* $p^{\text{ième}}$ *appartient à* L *appartienne lui-même à* L.

Cela étant, on peut établir, indépendamment du critère précédent, les trois théorèmes suivants :

Théorème A. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupe d'automorphismes d'un corps* (com.) K, *et soit* L *le sous-corps des invariants de* $\mathcal{G}$. *Pour que* K *soit de rang fini sur* L, *il faut et il suffit que* $\mathcal{G}$ *soit fini; s'il en est ainsi, le rang de* K *sur* L *est égal à l'ordre de* $\mathcal{G}$, *et* $\mathcal{G}$ *est le groupe de Galois* G_L^K.

([6]) Cette proposition est bien connue lorsque L est dans le *centre* de A, c'est-à-dire lorsque A est une *algèbre* sur L. Elle se démontre aussi aisément dans le cas général : désignons par 1 l'élément unité de A, et montrons d'abord que, pour tout a non nul de A, existe un $b \in A$ tel que $ba = 1$. L'application $x \to xa$ de A dans A est *linéaire* (pour la structure d'espace vectoriel à gauche sur K) et *biunivoque* (sinon a serait diviseur de zéro); comme l'espace vectoriel A est de dimension finie, cette application applique A *sur* A, et il existe donc un b tel que $ba = 1$. On a aussi $ab = 1$, car il existe de même un c tel que $cb = 1$, d'où $c = c(ba) = (cb)a = a$. Ainsi, tout élément $\neq 0$ de A possède un inverse. C. Q. F. D

([7]) En effet, un tel isomorphisme est une application linéaire biunivoque de l'espace vectoriel K (de dimension finie) sur un sous-espace de K, donc sur K tout entier.

THÉORÈME B. — *Soit* K *une extension galoisienne* (commutative) *de* L, *de rang fini sur* L. *Tout sous-corps* H *contenant* L *est sous-corps galoisien de* K. *En outre, il existe une correspondance biunivoque entre les sous-corps* H *tels que* $L \subset H \subset K$, *et les sous-groupes* $\mathfrak{H}$ *du groupe de Galois* G_L^K, *telle que chaque sous-corps* H *soit le sous-corps des invariants du groupe* $\mathfrak{H}$ *associé à* H, *et que chaque sous-groupe* $\mathfrak{H}$ *soit le groupe de Galois* K *de relativement au sous-corps* H *associé à* $\mathfrak{H}$.

THÉORÈME C. — *Soit* K *une extension galoisienne* (commutative) *de* L, *de rang fini sur* L. *Pour qu'un sous-corps* H *contenant* L *soit extension galoisienne de* L, *il faut et il suffit que le groupe* G_H^K *soit sous-groupe distingué de* G_L^K, *et alors le groupe de Galois* G_L^H *est isomorphe au groupe quotient* G_L^K/G_H^K.

Les théorèmes précédents ont été étendus par Jacobson ([3]) au cas où, K n'étant plus supposé commutatif, on envisage un groupe $\mathfrak{G}$ qui ne contient, en dehors de l'automorphisme identique, aucun automorphisme *intérieur* (*voir* § 4 ci-dessous); les théorèmes B et C valent alors si l'on suppose que le groupe de Galois G_L^K satisfait à cette condition.

Nous ne rappellerons pas ici les démonstrations des théorèmes précédents, puisqu'ils apparaîtront comme cas particuliers des théorèmes fondamentaux du paragraphe 5, que nous démontrerons aux paragraphes 6, 7 et 8.

3. *Le théorème de Jacobson-Bourbaki.* — Le théorème que nous allons exposer constitue le résultat essentiel d'un travail de Jacobson ([3]), où n'était envisagé que le cas d'un corps K *commutatif*. La présentation actuelle du théorème et son extension au cas d'un corps non commutatif sont dus à N. Bourbaki ([3]). C'est ce théorème qui nous servira de base de départ pour la généralisation des théorèmes A, B, C (§ 2) au cas non commutatif.

Alors que la théorie de Galois proprement dite n'envisage de correspondance qu'entre certains sous-corps de K (les sous-corps *galoisiens* L tels que K soit de rang fini sur L) et les groupes finis d'*automorphismes* de K, on va envisager ici *tous* les sous-corps L tels que K soit de rang fini sur L; de l'autre côté, il faudra remplacer la considération des groupes d'automorphismes par quelque chose de plus compréhensif.

Nous appellerons *endomorphisme* du corps K un endomorphisme de la structure du *groupe additif* de K, c'est-à-dire une application f de K dans K telle que $f(x-y)=f(x)-f(y)$ pour tout x et tout y de K. Sur l'ensemble $\mathfrak{E}(K)$ des endomorphismes de K, nous considérerons les deux structures suivantes : 1° une structure d'*anneau*, la somme h de deux endomorphismes f et g étant définie par $h(x)=f(x)+g(x)$ pour tout $x \in K$, et le produit p de f et g étant défini par $p(x)=f[g(x)]$ pour tout $x \in K$; 2° une structure d'*espace*

([3]) *Amer. Journal*, 66, 1944, p. 1.

([3]) *Voir*, dans le volume de BOURBAKI cité en ([3]), le paragraphe 5.

vectoriel (à droite) sur K, la somme de deux éléments de $\mathfrak{E}(K)$ étant définie comme plus haut, et le « produit » d'un endomorphisme f par un élément $k \in K$, noté fk, étant défini comme l'endomorphisme qui, à $x \in K$, fait correspondre l'élément $f(x)k$ du corps K.

Nous dirons qu'un sous-anneau $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{E}(K)$ est *sous-anneau vectoriel* s'il satisfait aux deux conditions suivantes : 1° $\mathfrak{A}$ contient l'endomorphisme *identique* (qui, à chaque x de K, fait correspondre ce même x); 2° $\mathfrak{A}$ est sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}(K)$ pour la structure d'espace vectoriel (à droite sur K) définie ci-dessus.

Le théorème de Jacobson-Bourbaki peut alors s'énoncer ainsi :

Il existe une correspondance biunivoque entre les sous-corps L *de* K *tels que* K *soit de rang fini (à gauche) sur* L, *et les sous-anneaux vectoriels de* $\mathfrak{E}(K)$ *qui sont de dimension finie* (comme espaces vectoriels à droite sur K). *Cette correspondance associe à chaque sous-corps* L *le sous-anneau des endomorphismes* f *tels que* $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ *pour tout* $x \in K$ *et tout* $\alpha \in L$ (endomorphismes de la structure d'espace vectoriel à gauche sur L); *inversement, elle associe à chaque sous-anneau vectoriel* $\mathfrak{A}$ *le sous-corps des* $\alpha \in K$ *tels que l'on ait* $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ *pour tout* $f \in \mathfrak{A}$ *et tout* $x \in K$. *Dans la correspondance précédente, la dimension d'un sous-anneau vectoriel est égale au rang de* K *sur le sous-corps associé au sous-anneau.*

La définition du sous-corps *associé* à un sous-anneau vectoriel $\mathfrak{A}$ a un sens même si $\mathfrak{A}$ n'est pas de dimension finie. Il résulte du théorème précédent le critère que voici : pour que le sous-corps L associé à un sous-anneau vectoriel $\mathfrak{A}$ soit tel que K soit de *rang fini* (à gauche sur L), il faut et il suffit que $\mathfrak{A}$ soit de *dimension finie* (à droite sur K), et alors le rang de K est *égal* à la dimension de $\mathfrak{A}$.

Pour la démonstration du théorème précédent, nous renvoyons au Traité de Bourbaki (⁹). Elle fait intervenir la notion d'éléments *primordiaux* d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de base (e_i) donnée (finie ou infinie). Tout élément d'un tel espace vectoriel E (à droite sur un corps K) s'écrivant d'une seule manière sous la forme $\sum_i e_i k_i$ (les coefficients $k_i \in K$ étant tous nuls sauf un nombre fini), on désigne, pour chaque élément x de E, par $I(x)$ l'ensemble (fini) des i tels que les coefficients k_i de x soient $\neq 0$: cet ensemble n'est vide que si $x = 0$. Soit alors V un sous-espace vectoriel de E; un élément x de V sera dit *primordial* [sous-entendu : relativement à la base (e_i) de E] si : 1° l'un au moins des coefficients k_i de x est égal à 1 (unité de K); 2° pour tout y de V tel que $I(y) \subset I(x)$, $I(y)$ est vide ou identique à $I(x)$, ce qui entraîne que y a la forme xk (où le coefficient $k \in K$; nous dirons que y est *proportionnel* à x). On voit facilement que *tout* élément de V est combinaison linéaire (à coefficients à droite dans K) d'éléments *primordiaux*; autrement dit, le sous-espace vectoriel V est *engendré* par ses éléments primordiaux.

La notion d'élément primordial jouera un rôle essentiel dans les démonstrations des théorèmes fondamentaux (*voir* ci-après, § 6, 7 et 8).

4. *Automorphismes intérieurs d'un corps; groupes achevés.* — Pour pouvoir énoncer simplement nos théorèmes, nous avons encore à préciser certaines notions et notations.

Étant donné un corps K, nous désignerons par K^* le *groupe multiplicatif* des éléments $\neq 0$ de K; plus généralement, pour tout sous-corps L de K, L^* désignera le sous-groupe de K^* formé des éléments $\neq 0$ de L.

A chaque $k \in K^*$, associons la transformation de K dans K

$$x \to kxk^{-1},$$

transformation que nous noterons σ_k [autrement dit, $\sigma_k(x) = kxk^{-1}$]. C'est un automorphisme de K (§ 1). Les automorphismes de la forme σ_k s'appellent les *automorphismes intérieurs* de K; ils forment un *groupe* que nous noterons Γ (tant qu'il n'y aura pas ambiguïté sur le corps K). L'application $k \to \sigma_k$ de K^* sur Γ est une *représentation* du premier groupe sur le second (le composé $\sigma_k \circ \sigma_h$ est égal à σ_{kh}); les k tels que σ_k soit l'automorphisme identique sont les éléments (autres que 0) du *centre* C de K, et par suite la représentation précédente définit un *isomorphisme* du groupe quotient K^*/C^* sur le groupe Γ des automorphismes intérieurs. Tout ceci est bien classique.

Si ω est un automorphisme (quelconque) de K, le « transformé » de σ_k par ω, c'est-à-dire l'automorphisme composé $\omega \circ \sigma_k \circ \omega^{-1}$, n'est autre que l'automorphisme intérieur σ_h, avec $h = \omega(k)$. Il en résulte que si $\mathcal{G}$ est un groupe quelconque d'automorphismes de K, le sous-groupe $\mathcal{G} \cap \Gamma$ est sous-groupe *distingué* de $\mathcal{G}$. Désignons par $K(\mathcal{G})$ l'ensemble des $k \in K^*$ tels que $\sigma_k \in \mathcal{G}$; c'est un sous-groupe de K^* qui contient C^*, et qui est *invariant* (dans son ensemble) par le groupe $\mathcal{G}$.

Considérons le *sous-corps* engendré par $K(\mathcal{G})$, sous-corps que nous noterons $\widehat{K(\mathcal{G})}$. Lui aussi est *invariant* (dans son ensemble) par $\mathcal{G}$. L'ensemble des automorphismes (de K) de la forme $\sigma_k \circ \omega$, où ω parcourt $\mathcal{G}$, et k parcourt $\widehat{K(\mathcal{G})}$, constitue donc un *groupe* qui contient $\mathcal{G}$, et que nous noterons $\widehat{\mathcal{G}}$; les groupes quotients $\mathcal{G}/\mathcal{G} \cap \Gamma$ et $\widehat{\mathcal{G}}/\widehat{\mathcal{G}} \cap \Gamma$ sont d'ailleurs isomorphes.

On remarquera que $\widehat{K(\mathcal{G})}$ contient le sous-espace vectoriel (sur C) engendré par $K(\mathcal{G})$; ce sous-espace vectoriel est un *sous-anneau* de K. Lorsque $K(\mathcal{G})$ est de *rang fini* sur C, ce sous-anneau est un *sous-corps* (*cf.* fin du § 1); c'est donc $K(\mathcal{G})$.

Nous dirons qu'un groupe $\mathcal{G}$ d'automorphismes de K est *achevé* si $\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$; autrement dit, si $K(\mathcal{G}) \cup \{0\}$ est un *sous-corps* de K. Dans tous les cas, le groupe $\widehat{\mathcal{G}}$ est achevé; c'est le plus petit groupe achevé contenant $\mathcal{G}$.

Pour tout sous-corps L de K, le groupe G_L^K (défini au paragraphe 1) est *achevé*, car $\sigma_k \in G_L^K$ signifie que k est $\neq 0$ et permute avec tout élément de L; donc $K(\mathcal{G})\cup\{0\}$ est le *sous-corps* (que nous noterons toujours L') des éléments de K qui permutent avec tout élément de L.

Si l'on part d'un groupe quelconque $\mathcal{G}$, et si L désigne le sous-corps des invariants de $\mathcal{G}$, le groupe *achevé* G_L^K a même sous-corps d'invariants que $\mathcal{G}$, et par suite le plus petit groupe achevé contenant $\mathcal{G}$ a même sous-corps d'invariants que $\mathcal{G}$. Il ne peut donc pas être question, comme dans la théorie de Galois pour corps *commutatifs*, de caractériser un groupe d'automorphismes de K par le sous-corps (galoisien) des invariants de ce groupe. Toutefois, nous allons voir moyennant quelles hypothèses de finitude un groupe *achevé* peut être caractérisé par son sous-corps d'invariants.

5. *Énoncé des théorèmes fondamentaux.*

THÉORÈME 1. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupe d'automorphismes d'un corps* K, *et soit* L *le sous-corps des invariants de $\mathcal{G}$. Pour que* K *soit de rang fini (à gauche) sur* L, *il faut et il suffit que :* 1° *le groupe quotient $\mathcal{G}/\mathcal{G}\cap\Gamma$ soit fini;* 2° $K(\mathcal{G})$ *soit de rang fini sur le centre* C *de* K [10]. *Dans ces conditions :*

α. *on a la relation*

$$r = nd$$

entre le rang r de K *sur* L, *l'ordre n du groupe $\mathcal{G}/\mathcal{G}\cap\Gamma$, et le rang d de* $K(\mathcal{G})$ *sur* C;

β. *le groupe de Galois G_L^K n'est autre que le plus petit groupe achevé contenant $\mathcal{G}$; en particulier, si $\mathcal{G}$ est achevé, il est groupe de Galois de* K *sur le sous-corps des invariants de $\mathcal{G}$.*

Ce théorème, qui généralise le théorème A du paragraphe 2, sera démontré plus loin (§ 6). On a bien entendu le même théorème pour le rang *à droite* (de K sur L), et par suite :

COROLLAIRE DU THÉORÈME 1. — *Si* L *est un sous-corps galoisien de* K, *et si le rang (à gauche) de* K *sur* L *est fini et égal à r, le rang (à droite) de* K *sur* L *est fini et égal à r.* On parlera désormais simplement du *rang* (tout court) de K sur un sous-corps *galoisien* de K.

Remarques. — 1° Soit L un sous-corps (galoisien ou non) tel que K soit de rang *fini* r (à gauche) sur L. Alors le groupe G_L^K satisfait aux conditions du théorème 1, puisque son sous-corps d'invariants H contient L. Le rang de K sur H est un diviseur du rang de K sur L, et ne lui est égal que si L est sous-

(10) S'il en est ainsi, on vient de voir (§ 4) que le sous-corps $\widehat{K(\mathcal{G})}$ engendré par $K(\mathcal{G})$ est identique au sous-espace vectoriel (sur C) engendré par $K(\mathcal{G})$.

corps *galoisien* de K. Si n désigne l'ordre de $G_L^K/G_L^K \cap \Gamma$, et d le rang de L sur C, on voit que nd *divise* r et ne peut être *égal* à r que si L est sous-corps galoisien de K.

2° Le cas envisagé par Jacobson (*) est celui où $d = 1$. C'est celui qui se présente toujours si K est *commutatif*.

THÉORÈME 2. — *Soit* L *un sous-corps galoisien d'un corps* K, *tel que* K *soit de rang fini sur* L. *Tout sous-corps* H *contenant* L *est sous-corps galoisien de* K, *et tout sous-groupe achevé du groupe de Galois* G_L^K *est groupe de Galois de* K *relativement à un sous-corps contenant* L. *D'une façon précise, il existe une correspondance biunivoque entre les sous-corps* H *tels que* $L \subset H \subset K$, *et les sous-groupes achevés* $\mathfrak{H}$ *de* G_L^K, *telle que chaque* H *soit le sous-corps des invariants du groupe* $\mathfrak{H}$ *associé à* H, *et que chaque* $\mathfrak{H}$ *soit le groupe de Galois de* K *relativement au sous-corps* H *associé à* $\mathfrak{H}$.

Ce théorème, qui généralise le théorème B (§ 2), sera démontré au paragraphe 7.

Remarque. — La correspondance précédente est évidemment décroissante : si $L \subset H_1 \subset H_2 \subset K$, le sous-groupe $\mathfrak{H}_1$ associé à H_1 contient le sous-groupe $\mathfrak{H}_2$ associé à H_2. De là résulte : le sous-groupe associé à l'intersection de deux sous-corps est le plus petit groupe achevé contenant les sous-groupes associés à ces sous-corps respectivement; le sous-groupe associé au sous-corps $[H_1, H_2]$ engendré par deux sous-corps H_1 et H_2 est l'intersection des sous-groupes associés respectivement à H_1 et H_2.

Si H est un sous-corps tel que $L \subset H \subset K$, le rang de K sur L est égal au produit des rangs de K sur H et de H sur L; tenant compte du théorème 2 et du corollaire du théorème 1, on voit que *si* K *est extension galoisienne de* L, *de rang fini sur* L, *le rang (à gauche) de* K *sur tout sous-corps* H *contenant* L *est égal au rang (à droite) de* K *sur ce même sous-corps*.

THÉORÈME 3. — *Soit* K *une extension galoisienne d'un corps* L, *de rang fini sur* L, *et soit* H *un sous-corps de* K *contenant* L (*cf.* théorème 2). On désignera par $G_I^K(H)$ le sous-groupe de G_L^K formé des automorphismes qui laissent H *invariant* (dans son ensemble). *Alors :*

1. *si un isomorphisme de* H *sur un sous-corps de* K *laisse invariants les éléments de* L, *il peut se prolonger en un automorphisme de* K;

2. *en particulier, les automorphismes du groupe* G_L^H *sont induits, sur* H, *par les automorphismes de* $G_I^K(H)$, *et par suite* G_L^H *est isomorphe au quotient du groupe* $G_L^K(H)$ *par son sous-groupe distingué* G_H^K;

3. *pour que* H *soit extension galoisienne de* L, *il faut et il suffit que* G_L^K *soit le plus petit groupe achevé contenant* $G_L^K(H)$;

4. *en particulier, si* H *est invariant par tout automorphisme du groupe de Galois* G_L^K (c'est-à-dire si $G_I^K(H) = G_I^K$), H *est extension galoisienne de* L; *pour*

qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que G_H^K *soit sous-groupe distingué de* G_I^K, *et* G_L^H *est alors isomorphe au quotient* G_L^K/G_H^K.

Remarque. — Si $\mathcal{G}$ est un sous-groupe *distingué* (non nécessairement achevé) de G_L^K, le sous-corps H des invariants de $\mathcal{G}$ est *invariant* par G_L^K, et le groupe de Galois G_L^H est isomorphe au quotient de G_L^K par le groupe $\mathcal{G}$.

Le théorème 3 généralise le théorème C (§ 2) et sera démontré au paragraphe 8.

Dès maintenant, nous pouvons tirer une conséquence intéressante de la partie α de ce théorème. Appelons *polynome* en x, à coefficients dans le corps L, toute somme finie de termes dont chacun a la forme

$$a\,x\,b\,x\,c\,x\,\ldots\,e\,x\,l,$$

où les éléments a, b, c, ..., e, l, en nombre fini quelconque, appartiennent à L, et où x est un « variable » qui va prendre ses valeurs dans K. Si l'on fixe x dans K, les polynomes en x sont des éléments de K qui constituent un *sous-anneau* de K contenant L. Donc, dans les hypothèses du théorème 3, ce sous-anneau est un *sous-corps* de K (*cf.* fin du paragraphe 1); c'est évidemment le sous-corps $[L, x]$ *engendré par* L *et* x. En tant qu'anneau, il est isomorphe au quotient de l'anneau des polynomes à une variable par l'*idéal bilatère* des polynomes qui s'annulent pour l'élément x considéré de K. Cela posé, convenons de dire que deux éléments x et y de K *satisfont aux mêmes relations algébriques à coefficients dans* L s'ils annulent les mêmes polynomes (à une variable) à coefficients dans L; dans ce cas, il existe un isomorphisme évident du sous-corps $[L, x]$ sur le sous-corps $[L, y]$, par passage au quotient à partir de l'isomorphisme des anneaux de polynomes. D'après le théorème 3, α, l'isomorphisme de $[L, x]$ sur $[L, y]$ se prolonge en un automorphisme de K.

Convenons alors de dire que deux éléments x et y de K sont *conjugués* par rapport à L s'il existe un automorphisme du groupe G_L^K qui transforme x en y. Il est évident que deux éléments conjugués satisfont aux mêmes relations algébriques (à coefficients dans L). Mais ce qui précède montre que la réciproque est exacte. Ainsi :

Corollaire du théorème 3, α. — *Dans les hypothèses du théorème* 3, *une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments de* K *soient conjugués par rapport à* L *est qu'ils satisfassent aux mêmes relations algébriques à coefficients dans* L.

Dans le cas où L est dans le centre de K, cette condition exprime que les deux éléments sont racines d'un même polynome *irréductible* sur L. On retrouve une proposition bien connue, lorsque K est un corps commutatif.

6. *Démonstration du premier théorème fondamental.* — Reportons-nous aux notions exposées au paragraphe 3. Tout automorphisme du corps K est *a fortiori* un endomorphisme du groupe additif de K, c'est-à-dire un élément de $\mathfrak{E}(K)$, espace vectoriel (à droite) sur K. On peut considérer les *combinaisons linéaires* $\sum_i \omega_i k_i$ d'automorphismes ω_i, à coefficients (à droite) dans K: ce sont des endomorphismes de K, et, exceptionnellement, des automorphismes de la structure de corps de K. On a aussi la notion d'automorphismes *linéairement dépendants* (sous-entendu : à droite sur K). Le lemme suivant va nous donner une condition pour la dépendance linéaire des automorphismes de K.

Lemme 1. — *Pour que les automorphismes d'une famille* $(\omega_i)_{i\in I}$ *soient linéairement dépendants, il faut et il suffit qu'il existe une partie finie non vide* J *de l'ensemble d'indices* I, *et, pour chaque* $i\in J$, *un élément* $k_i\in K^*$, *de manière que* $\sum_{i\in J} k_i = 0$, *et* $\omega_i = \tau_{k_i}\circ\omega$ *pour tout* $i\in J$ (ω désignant l'un des automorphismes ω_i).

La condition est suffisante, car on a alors, pour tout $x\in K$,

$$\sum_{i\in J}\omega_i(x)k_i = \sum_{i\in J} k_i\omega(x)k_i^{-1}k_i = \Big(\sum_{i\in J} k_i\Big)\omega(x) = 0.$$

Montrons que la condition est nécessaire. Les systèmes (k_i) d'éléments de K tels que les k_i soient tous nuls sauf un nombre fini, et que $\sum_i \omega_i k_i = 0$, forment un sous-espace vectoriel V de l'espace E (vectoriel à droite sur K) de *tous* les systèmes d'éléments de K, nuls sauf un nombre fini. Désignons par e_i le système des k_j tels que $k_j = 0$ pour $j\neq i$ et $k_i = 1$. Les e_i forment une *base* de E. On a alors la notion d'élément primordial de V (*cf.* § 3), c'est-à-dire de *relation primordiale* entre automorphismes ω_i. Cela posé, si les ω_i sont linéairement dépendants, il existe au moins une relation primordiale entre les ω_i (car l'espace vectoriel E de toutes les relations est engendré par les relations primordiales). Soit $\sum_i \omega_i k_i = 0$ une telle relation primordiale, et soit J l'ensemble des indices i tels que $k_i\neq 0$. Puisque

$$\sum_{i\in J}\omega_i(x)k_i = 0 \qquad \text{pour tout } x\in K, \tag{1}$$

on a en particulier, pour $x = 1$, $\sum_{i\in J} k_i = 0$. De plus, remplaçons x par xy dans (1); on a, pour tout $y\in K$, la relation

$$\sum_{i\in J}\omega_i(x)\omega_i(y)k_i = 0,$$

et par suite $\sum_{i\in I}\omega_i h_i = 0$, avec $h_i = 0$ pour $i \notin J$ et $h_i = \omega_i(\gamma)k_i$ pour $i \in J$. La relation (1) étant primordiale, il s'ensuit que le système (h_i) est *proportionnel* (avec coefficient à droite) au système (k_i). Le coefficient de proportionnalité est évidemment $\omega(\gamma)$, ω désignant celui des ω_i pour lequel $k_i = 1$. On a donc, pour tout $i \in J$,

$$\omega_i(\gamma)k_i = k_i\omega(\gamma) \qquad \text{pour tout } \gamma \in K, \qquad \text{c'est-à-dire } \omega_i = \sigma_{k_i}\circ\omega.$$

Ceci démontre le lemme.

Corollaire. — *Pour que des automorphismes intérieurs σ_{h_i} soient linéairement dépendants (à droite sur* K*), il faut et il suffit que les h_i soient linéairement dépendants sur le centre* C. (La même condition exprimera aussi la dépendance linéaire des σ_{h_i} *à gauche* sur K.)

En effet, la condition du lemme s'écrit $\sigma_{h_i} = \sigma_{k_i}\circ\sigma_h$, avec $\sum_{i\in J} k_i = 0$.

Abordons maintenant la démonstration du théorème 1. Soit $\mathcal{G}$ un groupe d'automorphismes du corps K. L'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients à droite dans K) d'automorphismes ω_i de $\mathcal{G}$ constitue un *sous-anneau vectoriel* de $\mathcal{E}(K)$: le seul point à vérifier est que le composé d'un endomorphisme $\omega_i k_i$ et d'un endomorphisme $\omega_j k_j$ est proportionnel à $\omega_i\circ\omega_j$: or c'est l'endomorphisme $(\omega_i\circ\omega_j)\omega_i(k_j)k_i$. Cherchons à quelle condition ce sous-anneau vectoriel $\mathfrak{A}$ est de *dimension finie* (à droite sur K). Il *faut* d'abord que $K(\mathcal{G})$ soit de *rang fini* sur C : car si $\mathfrak{A}$ est de dimension r, il existe au plus r éléments $k_i \in K^*$, linéairement indépendants sur C, tels que $\sigma_{k_i} \in \mathcal{G}$, en vertu du corollaire du lemme 1. Il *faut* en outre que le groupe quotient $\mathcal{G}/\mathcal{G}\cap\Gamma$ soit *fini* : car il existe au plus r éléments ω_j de $\mathcal{G}$; non congrus modulo $\mathcal{G}\cap\Gamma$, en vertu du lemme 1.

Réciproquement, supposons que $K(\mathcal{G})$ soit de rang fini d sur C, et que $\mathcal{G}/\mathcal{G}\cap\Gamma$ soit d'ordre fini n. Prenons d éléments $k_i \in K(\mathcal{G})$, formant une base de $\widehat{K(\mathcal{G})}$ [qui, rappelons-le, est le sous-espace vectoriel sur C, engendré par $K(\mathcal{G})$; *voir* § 4]. Prenons en outre n éléments ω_j de $\mathcal{G}$, représentant respectivement les classes de $\mathcal{G}$ modulo $\mathcal{G}\cap\Gamma$. Les $\sigma_{k_i}\circ\omega_j$ sont linéairement indépendants (à droite sur K), et engendrent le sous-espace vectoriel $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{E}(K)$, comme cela résulte du lemme 1. Puisque ces éléments sont en nombre nd, on voit que $\mathfrak{A}$ est de dimension finie égale à nd.

Ainsi : pour que le sous-anneau vectoriel $\mathfrak{A}$ formé des combinaisons linéaires (à coefficients à droite dans K) d'automorphismes de $\mathcal{G}$ soit de dimension finie, il faut et il suffit que : 1° le groupe quotient $\mathcal{G}/\mathcal{G}\cap\Gamma$ soit fini ; 2° $K(\mathcal{G})$ soit de rang fini sur C ; et l'on a alors la relation $r = nd$ entre la dimension r de $\mathfrak{A}$, l'ordre n de $\mathcal{G}/\mathcal{G}\cap\Gamma$, et le rang d de $K(\mathcal{G})$ sur C.

A partir de là, on obtient le théorème 1 en utilisant le théorème de Jacobson-Bourbaki (§ 3), suivant lequel la condition pour que $\mathfrak{A}$ soit de dimension finie égale à r, est que K soit de rang fini, égal à r, sur le sous-corps L des éléments x de K tels que l'on ait

$$f(xx) = xf(x) \qquad \text{pour tout } f \in \mathfrak{A} \text{ (et tout } x \in K). \tag{2}$$

Or il suffit d'exprimer la relation (2) pour les f d'un système de générateurs de l'espace vectoriel $\mathfrak{A}$, ici pour les automorphismes ω du groupe $\mathcal{G}$. Le sous-corps L est donc le sous-corps des invariants de $\mathcal{G}$, ce qui démontre le théorème 1, sauf l'assertion 3.

Pour démontrer 3, cherchons les automorphismes du groupe de Galois G_L^K; ce sont des endomorphismes f qui satisfont à (2); d'après le théorème de Jacobson-Bourbaki, ils appartiennent précisément à l'anneau $\mathfrak{A}$ ci-dessus, puisque cet anneau vectoriel est associé au sous-corps L. Le lemme 1 prouve alors que ces automorphismes ont la forme $\tau_k \circ \omega$, où ω appartient à $\mathcal{G}$, et k est combinaison linéaire (à coefficients dans C) d'éléments de $K(\mathcal{G})$. Autrement dit, les automorphismes de G_L^K sont ceux du groupe $\widehat{\mathcal{G}}$, plus petit groupe achevé contenant $\mathcal{G}$.

Remarque. — On voit que lorsque n et d sont *finis*, le groupe $\widehat{\mathcal{G}}$ se compose des automorphismes qui sont combinaisons linéaires (à coefficients dans K) d'automorphismes du groupe $\mathcal{G}$. Les coefficients à gauche donnent les mêmes automorphismes que les coefficients à droite.

7. *Démonstration du deuxième théorème fondamental.*

Lemme 2. — *Si un sous-anneau vectoriel* $\mathfrak{A}$ *de* $\mathfrak{E}(K)$ *est engendré* [en tant que sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}(K)$] *par des automorphismes de* K, *tout sous-anneau vectoriel* $\mathfrak{B}$ *contenu dans* $\mathfrak{A}$ *est engendré par des automorphismes du corps* K.

En effet, soient ω_i des *automorphismes* formant une *base* de l'espace vectoriel $\mathfrak{A}$ (à droite sur K). Pour cette base, considérons les éléments *primordiaux* du sous-espace vectoriel $\mathfrak{B}$. Je dis que si un endomorphisme $f = \sum_i \omega_i k_i$ est un élément primordial de $\mathfrak{B}$, f est *proportionnel* à un automorphisme ϖ du corps K; autrement dit, il existe un $h \in K$ tel que $\varpi = fh$. Le lemme en résultera, puisque $\mathfrak{B}$ est engendré par ses éléments primordiaux.

Puisque $f(x) = \sum_i \omega_i(x) k_i$ pour tout $x \in K$, on a, en remplaçant x par xy,

$$f(xy) = \sum_i \omega_i(x)\omega_i(y) k_i.$$

Or, pour chaque $y \in K$, l'endomorphisme $x \to f(xy)$ appartient à $\mathfrak{B}$; en effet $\mathfrak{B}$ contient l'endomorphisme identique $x \to x$, et est espace vectoriel sur K, donc contient l'endomorphisme $x \to xy$; de plus, $\mathfrak{B}$ est un anneau, donc contient le composé de cet endomorphisme et de l'endomorphisme f, ce qui prouve l'assertion. Cela étant, l'endomorphisme $x \to f(xy)$, qui appartient à $\mathfrak{B}$, est combinaison des ω_i, avec pour coefficients les $\omega_i(y)k_i$. Comme l'élément f de $\mathfrak{B}$ a été supposé primordial, les $\omega_i(y)k_i$ sont proportionnels aux k_i; le coefficient de proportionnalité (à droite) est $\omega(y)$, en désignant par ω celui des ω_i pour lequel $k_i = 1$. Ainsi, on a

$$f(xy) = f(x)\omega(y), \qquad \text{d'où en particulier } f(y) = f(1)\omega(y).$$

$f(1)$ n'est pas nul, sinon $f(y)$ serait nul pour tout y, et f ne serait pas un élément primordial de $\mathfrak{B}$. Posons alors

$$\varpi(x) = f(x)[f(1)]^{-1};$$

on a $\varpi(x) = f(1)\omega(x)[f(1)]^{-1}$, donc ϖ, comme ω, est un *automorphisme*.

C. Q. F. D.

Abordons maintenant la démonstration du théorème 2. Dans les hypothèses de ce théorème, désignons par $\mathfrak{A}$ le sous-anneau vectoriel de $\mathfrak{E}(K)$ engendré par les automorphismes du groupe G_L^K. D'après le théorème de Jacobson-Bourbaki (§ 3), il y a correspondance biunivoque entre les sous-corps H tels que $L \subset H \subset K$, et les sous-anneaux vectoriels contenus dans $\mathfrak{A}$. D'après le lemme 2, un tel sous-anneau vectoriel $\mathfrak{B}$ est engendré par des *automorphismes* du corps K, et par suite, le sous-corps H associé à $\mathfrak{B}$ est le sous-corps des éléments de K invariants par ces automorphismes; H est donc sous-corps *galoisien* de K. En outre, pour qu'un automorphisme appartienne à $\mathfrak{B}$, il faut et il suffit qu'il laisse invariants les éléments du sous-corps H associé; donc les automorphismes qui appartiennent à $\mathfrak{B}$ sont précisément ceux du groupe de Galois G_H^K. Les groupes G_H^K relatifs aux sous-corps H de K contenant L constituent *tous* les sous-groupes *achevés* de G_L^K, car si $\mathfrak{H}$ est un sous-groupe achevé de G_L^K, le sous-corps H des invariants de $\mathfrak{H}$ contient L, donc K est de rang fini sur H, et par suite (théor. 1, β) $\mathfrak{H}$ est le groupe de Galois de K relativement à H.

Le théorème 2 est donc entièrement démontré.

8. *Démonstration du troisième théorème fondamental.* — Les parties β et δ du théorème 3 étant des conséquences immédiates des parties α et γ, nous nous bornerons à démontrer α et γ.

La démonstration de α est analogue à celle du lemme 1 (§ 6). Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 3. Soit ω un isomorphisme de H sur un sous-corps de K, qui laisse invariants les éléments du sous-corps L. Si l'on envisage

sur K la structure d'espace vectoriel (à gauche) sur L, ω est une application *linéaire* du sous-espace vectoriel H dans l'espace K. On peut donc prolonger ω (de plusieurs manières) en une application linéaire $\bar{\omega}$ de K dans K, c'est-à-dire en un élément du sous-anneau vectoriel $\mathfrak{A}$ que le théorème de Jacobson-Bourbaki associe au sous-corps L. Or on a supposé que K est une extension *galoisienne* de L, de rang fini sur L; donc $\mathfrak{A}$ se compose des combinaisons linéaires (à droite sur K) des automorphismes du groupe de Galois G_L^K.

Bref, le prolongement $\bar{\omega}$ de ω est combinaison linéaire d'automorphismes ω_i du groupe G_L^K; on aura en particulier une relation de la forme

$$\omega(x) = \sum_i \omega_i(x) k_i \qquad \text{pour tout } x \in H.$$

Les éléments 1 et $-k_i$ sont ainsi les coefficients d'une relation linéaire entre ω et les ω_i *sur le sous-corps* H; et l'on peut, parmi toutes les relations linéaires de ce type, en choisir une qui soit *primordiale* (au sens du paragraphe 6, démonstration du lemme 1), et telle que le coefficient de ω soit égal à 1. Une telle relation primordiale s'écrira

$$\omega(x) = \sum_{i \in J} \omega_i(x) k_i \qquad \text{pour } x \in H, \tag{3}$$

les k_i étant $\neq 0$ pour $i \in J$, et déterminés de façon *unique*. Or, si l'on remplace, dans (3), x par xy ($y \in H$), on obtient

$$\omega(x)\omega(y) = \sum_{i \in J} \omega_i(x)\omega_i(y) k_i \qquad \text{pour } x \in H,$$

d'où, en vertu de l'unicité,

$$k_i \omega(y) = \omega_i(y) k_i \qquad \text{pour tout } y \in H.$$

Ceci exprime que ω est la restriction à H de l'automorphisme de K

$$x \to k_i^{-i} \omega_i(x) k_i,$$

i désignant un élément particulier (d'ailleurs quelconque) de J.

La partie α du théorème 3 étant ainsi démontrée, démontrons γ. Soit L_1 le sous-corps des invariants de $G_L^K(H)$; comme $G_L^K(H) \supset G_H^K$, L_1 est contenu dans H. Dire que L est sous-corps galoisien de H, c'est dire que $L_1 = L$, donc (théor. 1, 3) que G_L^K est le plus petit groupe achevé contenant $G_L^K(H)$.

C. Q. F. D.

9. *Application aux théorèmes de Skolem-Nœther* (1). — Soit K un corps de *rang fini sur son centre* C. Appliquons le théorème 1, 3 en prenant pour groupe $\mathcal{G}$ le groupe Γ des automorphismes *intérieurs* de K. Le groupe Γ étant

évidemment achevé, et le sous-corps L étant ici le centre C, on voit que Γ *est le groupe de Galois de* K *relativement à son centre* C.

Un sous-groupe *achevé* de Γ est formé des σ_k relatifs aux k non nuls d'un *sous-corps* contenant C. Le théorème 2 nous dit alors que les sous-corps contenant C se correspondent deux à deux, chacun des deux se composant des éléments de K qui *permutent* avec les éléments de l'autre. Si H est un sous-corps contenant K, et si H′ désigne le sous-corps associé (formé des éléments qui permutent avec ceux de H), le théorème 1, α donne l'égalité $r = d$ entre le rang r de K sur H et le rang d de H′ sur C; c'est dire que *le rang de* K *sur* C *est égal au produit des rangs de* H *sur* C *et de* H′ *sur* C.

Enfin, le théorème 3, α montre que *si un isomorphisme de* H *sur un sous-corps de* K *laisse invariants les éléments de* C, *il est induit* (*sur* H) *par un automorphisme intérieur de* K (dans cet énoncé, H désigne un sous-corps contenant C).

On retrouve ainsi les principaux théorèmes de Skolem et E. Nœther, par une voie différente de celles suivies jusqu'ici. Mais, tandis que les résultats de Skolem-Nœther valent plus généralement pour un *anneau simple* (de rang fini sur son centre) et ses sous-anneaux simples contenant le centre, nous ne les trouvons ici que pour un *corps*. Toutefois J. Dieudonné me fait remarquer qu'un théorème général qu'il a démontré en 1942 ([11]) permet de déterminer la nature des automorphismes d'un anneau simple (c'est-à-dire d'un anneau de matrices sur un *corps*, au moins dans le cas où l'anneau en question est de rang fini sur son centre), lorsqu'on connaît les automorphismes de ce corps; on retrouverait donc, par cette voie, le théorème de Skolem-Nœther relatif aux automorphismes d'un anneau simple qui laissent invariants les éléments du centre de cet anneau.

Remarque. — Soit K un corps dont nous ne supposons même plus qu'il soit de rang fini sur son centre C, et soit H un sous-corps contenant C et de *rang fini d* sur C. Appliquons le théorème 1 au groupe formé des automorphismes intérieurs σ_k relatifs aux $k \in$ H. En désignant toujours par H′ le sous-corps des éléments qui permutent avec les éléments de H, on obtient les résultats suivants : 1° *le rang r de* K *sur* H′ *est égal au rang d de* H *sur* C; 2° *le sous-corps des éléments qui permutent avec les éléments de* H′ *n'est autre que* H. Ceci généralise l'un des théorèmes de Skolem-Nœther aux corps de rang infini sur leur centre.

10. *Interprétation de la théorie générale dans le cas d'un corps de rang fini sur son centre.* — Dans tout ce paragraphe, K désigne un corps de rang *fini* sur son centre C.

Soit L un sous-corps *galoisien* de K, tel que K soit de rang fini sur L. Le sous-corps [C, L] engendré par C et L, sous-corps que nous désignerons par H,

([11]) *Bull. Soc. Math. de France*, 70, 1942, p. 46-75; *voir* p. 69, théorème 5.

est sous-corps *galoisien* de K, puisqu'il contient L (*cf.* théor. 2) (12), et le groupe de Galois G_H^K est l'*intersection* des groupes de Galois de K relativement à C et L respectivement; c'est donc $G_L^K \cap \Gamma$. Ainsi G_H^K *se compose des automorphismes intérieurs qui appartiennent au groupe* G_L^K, c'est-à-dire des σ_k relatifs aux k non nuls du sous-corps $L' = H'$.

H *est une extension galoisienne de* L, car, C étant invariant (dans son ensemble) par tout automorphisme du corps K, le sous-corps $H = [C, L]$ est invariant (dans son ensemble) par le groupe G_L^K. Il en résulte bien que H est extension galoisienne de L (théor. 3, δ). En outre (théor. 3, δ), le groupe de Galois G_L^H est isomorphe au quotient $G_L^K/G_H^K = G_L^K/G_L^K \cap \Gamma$, groupe qui est *fini*. Soit n l'ordre de ce groupe, qui est aussi le *rang* de H sur L (théor. 1, α).

L'intersection $C \cap L$ est le sous-corps des invariants du groupe $\mathcal{G}$ engendré par $G_C^K = \Gamma$ et G_L^K, groupe qui se compose des automorphismes $\sigma_k \circ \omega$, où $k \in K^*$ et $\omega \in G_L^K$. Ce groupe est évidemment achevé; l'entier d que lui attache le théorème 1 est égal au rang de K sur C, et l'entier n que lui attache le théorème 1 est égal à l'ordre de $G_L^K/G_L^K \cap \Gamma$, c'est-à-dire à l'entier précisément désigné par n auparavant, et égal au rang de H sur L. D'après le théorème 1, $\mathcal{G}$ est le groupe de Galois de K relativement à $C \cap L$, et le rang de K sur $C \cap L$ est égal à nd, produit du rang de K sur C et du rang de H sur L; d'où il résulte que *le rang de* C *sur* $C \cap L$ *est égal au rang* n *de* $H = [C, L]$ *sur* L.

D'ailleurs, C *est extension galoisienne de* $C \cap L$, car tout automorphisme du groupe de Galois de K relativement à $C \cap L$ laisse C invariant; il suffit alors d'appliquer le théorème 3, δ. Nous allons voir que *les groupes de Galois* (finis) $G_{C\cap L}^C$ et G_L^H *sont isomorphes*, de sorte que $G_{C\cap L}^C$ (groupe de Galois d'un corps *commutatif*, relativement à un sous-corps galoisien $C \cap L$) est isomorphe à $G_L^K/G_L^K \cap \Gamma$. Nous allons définir un isomorphisme canonique, bien déterminé, de G_L^H sur $G_{C\cap L}^C$. Pour cela, remarquons que tout automorphisme ϖ de C qui laisse invariants les éléments de $C \cap L$ peut se prolonger en un automorphisme du groupe $G_{C\cap L}^K$, d'après le théorème 3, α. Mais ce dernier groupe, on l'a vu, se compose des $\sigma_k \circ \omega$ où $k \in K^*$ et $\omega \in G_L^K$. Comme σ_k laisse invariants les éléments de C, on voit que ϖ est la restriction (à C) d'un $\omega \in G_L^K$. Un tel ω laisse invariants les sous-corps C et L, donc laisse invariant le sous-corps $H = [C, L]$. Bref, *tout automorphisme de* $G_{C\cap L}^C$ *est la restriction à* C *d'un automorphisme de* G_L^H. Réciproquement, tout automorphisme de G_L^H laisse C invariant, puisqu'il se prolonge en un automorphisme du corps K (théor. 3, α), donc sa restriction à C est un automorphisme du groupe $G_{C\cap L}^C$; en outre deux automorphismes distincts de G_L^H induisent sur C deux isomorphismes *distincts* de $G_{C\cap L}^C$, car si un automorphisme du corps H laisse invariants les éléments de L et ceux de C, c'est l'automorphisme identique. En résumé, si à chaque automorphisme du

(12) Ce résultat vaut même si le rang de K sur C est infini.

groupe G_L^H on fait correspondre sa restriction à C, on obtient une fois et une seule les automorphismes du groupe $G_{C\cap L}^C$. C. Q. F. D.

Remarque. — Puisque le rang de H sur L est égal au rang de C sur $C\cap L$, le rang de H sur C est égal au rang de L sur $C\cap L$; ou encore, le rang de $H=[C, L]$ sur $C\cap L$ est égal au *produit* des rangs de C et de L sur $C\cap L$. Ceci exprime que les corps C et L sont « linéairement disjoints », ou encore que [C, L] est isomorphe au *produit tensoriel* de C et L considérés comme *algèbres* sur $C\cap L$ ([13]).

11. *Nouvelle propriété des corps de rang fini sur leur centre.* — Soit K un corps de rang fini sur son centre C. Il peut fort bien exister un sous-corps H contenant C, distinct de K et de C, tel que H soit une *extension galoisienne* de C : il suffit par exemple de prendre pour K le corps des quaternions réels, pour C le sous-corps *réel* de K, et pour H une extension de rang deux de C, isomorphe au corps des nombres complexes. Dans le cas général, le théorème 3, γ affirme que si H est une extension galoisienne de C, le sous-corps de K engendré par les k tels que σ_k laisse H invariant (dans son ensemble), n'est autre que K lui-même.

Il est naturel de se demander s'il est possible que *tous* les automorphismes intérieurs σ_k laissent H invariant (dans son ensemble). Nous allons voir que ce cas ne peut se présenter; d'une façon précise :

THÉORÈME 4. — *Soit* K *un corps de rang fini sur son centre* C. *Si un sous-corps* H, *tel que* $C\subset H\subset K$, *est invariant par tout automorphisme intérieur de* K, *il est identique à* C *ou à* K.

Ce théorème, que je crois nouveau, peut être interprété de la façon suivante, en tenant compte du corollaire du théorème 3 (fin du § 5). D'après ce corollaire, une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments x et y de K puissent être transformés l'un dans l'autre par un automorphisme intérieur de K, est qu'ils soient racines du même polynome *irréductible* (sur C, à coefficients dans C). Le théorème 4 exprime donc que si un polynome irréductible possède au moins une racine qui soit dans K sans être dans C, *l'ensemble des racines de ce polynome engendre, avec* C, *le corps* K *tout entier* (le mot « engendre » s'entendant au sens de la structure de *corps*; autrement dit, le plus petit sous-corps contenant C et les racines du polynome n'est autre que K). D'ailleurs, ce résultat vaut pour un polynome *quelconque* (non nécessairement irréductible) à coefficients dans C : il suffit de le décomposer en facteurs irréductibles.

Nous allons démontrer le théorème 4 en supposant $K\neq C$ (si $K=C$ il est trivial), c'est-à-dire K non commutatif. En particulier, nous pourrons supposer

([13]) *Voir* un volume de BOURBAKI à paraître prochainement : *Algèbre*, Chapitre III (Algèbre multilinéaire); *voir* en particulier § 3, n° 3.

que K *a une infinité d'éléments*, puisqu'on sait que tout corps fini est commutatif.

Puisque H est supposé invariant par tout automorphisme intérieur, c'est-à-dire par tout automorphisme du groupe de Galois G_C^K, le théorème 3, δ prouve que H est une extension *galoisienne* de C, et que le groupe de Galois G_C^H est isomorphe au quotient G_C^K/G_H^K. Or G_C^K se compose des σ_k tels que $k \in K^*$, et G_H^K des σ_k tels que $k \in H'^*$ (On désigne toujours par H' le sous-corps des éléments de K qui permutent avec tout élément de H). Le groupe G_C^H contient le sous-groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes intérieurs *du corps* H, c'est-à-dire des automorphismes induits sur L par les σ_k tels que k ait la forme xy, avec $x \in H'^*$ et $y \in H^*$; de plus, le groupe quotient $G_C^H/\mathcal{G}$ est *fini* (théor. 1). Cela signifie que si l'on désigne par A le sous-groupe de K^* formé des éléments xy (tels que $x \in H'^*$ et $y \in H^*$), le groupe quotient K^*/A est *fini*.

Considérons le sous-corps [H, H'] engendré par H et H'; il contient A, et par suite l'ensemble des éléments $\neq 0$ de ce sous-corps est un *sous-groupe d'indice fini de* K^*. Or K est espace vectoriel (à gauche) sur [H, H']; je dis que le *rang* de K sur [H, H'] ne peut pas être strictement plus grand que *un*. En effet, soit $(k_1, \ldots, k_r)$ une *base* de K sur [H, H']; on obtient un représentant de chaque classe de K^* suivant $[H, H']^*$ en prenant les combinaisons $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i k_i$ telles que le premier α_i non nul soit égal à 1, les suivants étant des éléments arbitraires de [H, H']. Puisque le nombre de ces représentants est *fini*, le rang r ne peut être ≥ 2 que si le corps [H, H'] des coefficients est fini. Or ceci est impossible, sinon K, qui est de rang fini sur ce corps, serait lui-même fini, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi le rang de K sur [H, H'] est égal à un; autrement dit, [H, H'] est identique à K. Le corps $H \cap H'$, formé des éléments qui permutent avec H' et H respectivement, est donc réduit au centre C. Cela signifie que C *est le centre de* H. Il s'ensuit que tous les automorphismes du groupe G_C^H sont des automorphismes intérieurs *du corps* H. Comme tout automorphisme intérieur de K induit, sur H, un automorphisme du groupe G_C^H, on voit que tout $k \in K^*$ a la forme xy, où $x \in H'^*$ et $y \in H^*$.

Or soit (k_i) une base de H sur C, et (h_j) une base de H' sur C. Les produits $k_i h_j$ engendrent $[H, H'] = K$, comme espace vectoriel sur C; et comme leur nombre est égal au *rang* de K sur C (§ 9), ils forment une *base* de K sur C. Ceci va nous permettre de montrer que H *ou* H' *est identique à* C, ce qui démontrera évidemment le théorème. En effet, dans le cas contraire, les k_i seraient en nombre au moins égal à deux, ainsi que les h_j; considérons l'élément $k_1 h_1 + k_2 h_2$ de K^* : il doit avoir la forme $xy = yx$, où $x \in H'^*$ et $y \in H^*$. Or ceci est impossible, car si $y = \sum_i c_i k_i$ et $x = \sum_j c'_j h_j$ (les c_i et les c'_j étant dans C),

l'identification de yx à $k_1 h_1 + k_2 h_2$ conduit notamment aux relations

$$c_1 c'_1 = c_2 c'_2 = 1, \qquad c_1 c'_2 = c_2 c'_1 = 0,$$

qui sont évidemment contradictoires.

La démonstration du théorème 4 est ainsi terminée.

Le théorème 4 et le théorème 3, γ (§ 5) prouvent : si un sous-groupe *distingué* de K^* contient C^* et est $\neq C^*$, le *sous-corps* qu'il engendre n'est autre que K. Il est naturel de se demander si un tel sous-groupe n'est pas nécessairement *identique* à K^*; autrement dit, on est conduit au problème, que je n'ai pas su résoudre : si un corps K est de rang fini sur son centre C, peut-on affirmer que le groupe quotient $K^* C^*$ est *simple*, ou, ce qui revient au même, que le groupe Γ des automorphismes intérieurs de K est *simple*?

Note rajoutée lors de la correction des épreuves (novembre 1947). — Depuis que cet article a été écrit (décembre 1946-janvier 1947), j'ai eu connaissance d'un article de Jacobson (*Amer. Journal of Math.*, t. 69, janvier 1947, p. 27-36) où se trouvent démontrés des théorèmes équivalents à mes théorèmes 1 et 2.

THÉORIE DE LA DUALITÉ

ET

ANALYSE HARMONIQUE

DANS LES

GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS

PAR MM. HENRI CARTAN ET ROGER GODEMENT.

INTRODUCTION.

Le but du présent article est d'exposer, avec le maximum de généralité et le minimum d'artifices techniques, les principes essentiels de l'Analyse harmonique. Pour cela, et comme l'a vu André Weil [1], il faut poser le problème en termes de théorie des groupes. Mais nous nous séparons de Weil en ce que notre théorie ne nécessite, à aucun moment, d'hypothèse relative à la *structure* particulière des groupes envisagés; elle s'applique indistinctement à n'importe quel groupe abélien, et permet par exemple de traiter les classiques *séries* et *intégrales* de Fourier suivant des procédés rigoureusement identiques.

Notre exposé n'aurait sans doute pas vu le jour sans le travail fondamental de I. Gelfand et D. Raïkov [2]; à ces deux auteurs revient le mérite d'avoir mis en pleine lumière le rôle des fonctions de type positif en théorie des groupes: bien entendu, leurs résultats ont une portée qui va bien au delà du sujet du présent article; on pourra consulter, à ce propos, outre leur Mémoire cité plus haut, la Thèse de l'un d'entre nous [3]. Nous nous sommes bornés ici à appliquer aux groupes *abéliens* les méthodes de ces deux auteurs, et avons cherché à en tirer, sur ce terrain particulier, le parti maximum. Il semble d'autre part que ces deux mathématiciens, se basant sur la théorie des anneaux normés de Gelfand, aient obtenu dès 1941 une construction directe de la transformation de Fourier; mais l'impossibilité de consulter en France, actuellement,

les travaux publiés à Moscou entre 1939 et 1942, nous interdit malheureusement d'en parler (cf. *Note* suivant la Bibliographie).

Notre exposé n'est pas « élémentaire »; il suppose connues du lecteur certaines notions fondamentales relatives aux espaces de Hilbert et de Banach, à la théorie de la mesure et au produit de composition dans les groupes. Mais l'expérience prouve que les exposés élémentaires de la transformation de Fourier sont souvent obscurs et, au sens propre du terme, mystérieux. Il nous semble au contraire que les notions de base que nous venons de nommer jouent dans cette question un rôle essentiel, bien que ce rôle n'ait été reconnu qu'une fois les principaux résultats obtenus. Enfin, c'est peut-être l'intervention simultanée de méthodes aussi diverses qui constitue précisément le caractère le plus passionnant de l'Analyse harmonique, et qui en fait une branche particulièrement instructive des Mathématiques. Nous espérons donc que le lecteur voudra bien fournir, s'il y a lieu, l'effort préliminaire que nous lui demandons: les instruments employés ici s'appliquent du reste à beaucoup d'autres branches des Mathématiques.

I. — Rappel de notions fondamentales.

Les quelques définitions et résultats que nous allons rappeler ont pour but d'orienter le lecteur désireux d'acquérir les notions de base indispensables. Pour plus de détails, le lecteur consultera les ouvrages cités dans la Bibliographie [1, 4, 5, 6].

Nous nous dispensons de parler ici des espaces hilbertiens (opérateurs hermitiens ou unitaires, décomposition spectrale de tels opérateurs): ces notions sont en effet assez répandues aujourd'hui (1).

1. *Espaces de Banach.* — Un espace de Banach (complexe) est un espace vectoriel (sur le corps des nombres complexes), normé, complet. Le *dual* d'un tel espace E est l'espace E′ des formes linéaires *continues* sur E (fonctions linéaires continues à valeurs complexes), muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Un sous-ensemble de E′ sera *borné* s'il existe $M \geq 0$ tel que $\|f\| \leq M$ pour tout f de cet ensemble. La *topologie faible* est définie de la façon suivante, sur tout ensemble borné de E′ : une f variable converge faiblement vers une f_0 de E′ si $f(x)$ tend vers $f_0(x)$ pour tout $x \in E$; il suffit du reste (f restant de norme bornée) qu'il en soit ainsi pour les x d'un sous-ensemble partout dense de E.

(1) On pourra consulter la monographie de B. von Sz. Nagy (*Ergebn. der Math.*, Bd. 5, H. 5, Berlin, 1942) ou le traité classique de M. H. Stone.

Tout sous-ensemble *borné* de E', *fermé* pour la topologie faible de E', est *compact* (²) pour cette topologie.

Pour qu'un sous-espace vectoriel *fermé* V de E soit $\neq E$, il faut et il suffit qu'il existe une $f \in E'$ telle que $f \not\equiv 0$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in V$.

2. *Mesures de Radon.* — Pour un espace *localement compact* G (²), on notera L^+ l'ensemble des fonctions numériques continues ≥ 0, nulles en dehors d'ensembles compacts. Une mesure de Radon *positive* est une fonctionnelle additive $\mu(f)$ définie pour $f \in L^+$, à valeurs réelles ≥ 0 et finies. Elle se prolonge d'une manière évidente en une fonctionnelle *linéaire* sur l'espace vectoriel complexe L des fonctions continues numériques *complexes*, nulles en dehors de compacts. Une mesure de Radon *complexe* est une fonctionnelle linéaire sur L, qui soit de la forme $\mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ (μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 désignant des mesures de Radon positives).

Pour chaque mesure de Radon *positive* μ, on définit les fonctions f (numériques complexes) *sommables* pour μ; leur intégrale, essentiellement *finie*, est notée $\int f(x)\,d\mu(x)$. L'ensemble des fonctions sommables constitue un espace de Banach L^1 où la norme est $\|f\|_1 = \int |f(x)|\,d\mu(x)$. Une fonction φ est *sommable sur tout compact* si $f\varphi$ est sommable quelle que soit $f \in L$. Les fonctions bornées et sommables sur tout compact constituent un second espace de Banach L^∞ où la norme est $\|f\|_\infty = \sup_{x \in G} |f(x)|$. Dans l'espace L^1 comme dans l'espace L^∞ on ne distingue pas entre deux fonctions dont la différence a une norme nulle, c'est-à-dire entre deux fonctions qui sont égales *presque partout* pour μ. Une mesure *positive* variable μ *converge vaguement* vers une mesure (positive) μ_0, si $\mu(f)$ tend vers $\mu_0(f)$ pour chaque $f \in L^+$ et par suite pour chaque $f \in L$.

Une mesure positive μ est de *masse totale finie* (ou encore *bornée*) si la constante *un* est sommable; son intégrale $\int d\mu$, qui est finie, est alors la *masse totale* de μ. Lorsque G est *compact*, toute μ est de masse totale finie, et la convergence vague s'identifie à la convergence *faible* dans le dual de L (considéré comme espace de Banach avec la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|\Big).$$

Lorsque G n'est pas compact, soit G' l'espace compact obtenu en adjoignant à G un « point à l'infini » (théorème d'Alexandroff) (³). Pour une f continue et bornée sur G, posons encore $\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$; pour cette *norme*, l'adhérence L_∞ de L se compose des f continues (sur G') telles que $f(x)$ tende vers zéro

(²) La terminologie est celle du traité de Bourbaki [6].

(³) *Voir* Bourbaki [6], Chap. I, § 10.

lorsque x « tend vers l'infini » (4). Une mesure de masse totale finie définit une *forme linéaire continue* sur l'espace de Banach L_x (normé par f); la réciproque est évidente : tout élément du dual de L_x peut être identifié à une mesure de Radon sur G (en général *complexe*), combinaison linéaire de mesures positives et de *masses totales finies*. La convergence *vague* des mesures positives de masse totale ≤ 1 s'identifie à la convergence *faible* dans le dual de L_x : *l'ensemble des mesures positives de masse totale au plus égale à un est donc compact pour la topologie vague*. Enfin, une mesure positive de masse totale finie peut être considérée comme une mesure sur l'espace compact G', mesure pour laquelle le « point à l'infini » est de mesure nulle. On dira qu'une μ positive variable, de masse totale ≤ 1, converge *étroitement* vers une μ_0 de même nature, si la convergence a lieu au sens de la convergence *vague* des mesures *sur l'espace* G'. Pour cela, il faut et il suffit que :

a. μ converge vaguement vers μ_0 (au sens de G);

b. en outre, $\int d\mu$ tende vers $\int d\mu_0$.

Les μ positives de masse totale ≤ 1 ne forment pas un ensemble compact pour la topologie *étroite*, sauf bien entendu si G est compact.

3. *Mesure de Haar et produit de composition sur un groupe localement compact.* — Soit G un groupe *localement compact*; l'élément neutre sera noté e, la loi de composition sera notée multiplicativement. La *mesure de Haar* (à gauche) sur G est une mesure de Radon positive, notée dx, telle que

$$\int f(x)\,dx = \int f(s^{-1}x)\,dx \qquad \text{pour tout } s \in G \text{ et toute } f \in L.$$

Cette mesure est bien déterminée à un facteur constant (positif) près. De même, il existe une mesure de Haar *à droite*.

Le *produit de composition* $f \star g$ de deux fonctions définies sur G (et sommables sur tout compact pour dx, comme toutes les fonctions que l'on aura à envisager par la suite) est défini par la formule

$$f \star g(x) = \int f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy$$

lorsque celle-ci a un sens ; ce qui est le cas par exemple si $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$ (dans ce cas $f \star g$ est une fonction *continue et bornée* sur G); ou si f et g sont *sommables* pour dx (dans ce cas $f \star g$ est aussi sommable, et l'on a

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

(4) On aura soin de ne pas confondre L_x et L^∞.

où la norme $\|f\|_1$ est relative à la mesure dx); enfin c'est encore le cas si f et g sont de *carré sommable* sur G pour dx (on désignera par L^2 l'espace des fonctions de carré sommable sur G pour dx; on sait que, si l'on y introduit la norme

$$\|f\|_2 = \left\{\int |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2}$$

et le *produit scalaire*

$$(f, g) = \int f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

on obtient un espace de Hilbert).

Notons encore le fait important suivant : le dual de l'espace de Banach L^1 peut être identifié à l'espace L^∞, la fonctionnelle linéaire continue sur L^1 associée à l'élément $\varphi \in L^\infty$ étant donnée par

$$(f, \varphi) = \int f(x)\overline{\varphi(x)}\, dx.$$

Cette remarque permet de définir une *topologie faible* dans L^∞ : sur toute partie bornée de L^∞, cette topologie n'est autre que celle définie par la convergence vague de la mesure $f(x)\,dx$ associée à $f \in L^\infty$.

Si G est *abélien*, les mesures de Haar à droite et à gauche coïncident, et l'on a $f \star g = g \star f$.

II. — Fonctions de type positif. Caractères d'un groupe abélien.

On considère un groupe G localement compact; G ne sera supposé abélien qu'à partir du n° 6.

4. *Fonctions de type positif.* — Une fonction φ, sommable sur tout compact, est de type positif si l'on a

$$\int \varphi(x^{-1}y) f(x)\, dx \overline{f(y)}\, dy \geq 0 \qquad \text{pour toute } f \in L.$$

Une telle φ de type positif définit un espace hilbertien $\mathcal{H}_\varphi$ de la manière suivante : pour f et $g \in L$, on définit le « produit scalaire »

$$(f, g)_\varphi = \int \varphi(x^{-1}y) f(x)\, dx \overline{g(y)}\, dy;$$

les $f \in L$ telles que $(f, f)_\varphi = 0$ constituent un sous-espace L_φ de L; l'expression $\sqrt{(f, f)_\varphi}$, considérée sur l'espace quotient L/L_φ, constitue une véritable norme hilbertienne, et l'on obtient alors $\mathcal{H}_\varphi$ en complétant L/L_φ pour cette norme; il en résulte en outre une « représentation canonique » de L sur un sous-espace partout dense de $\mathcal{H}_\varphi$.

Pour toute fonction f, soit $f_s(x)=f(s^{-1}x)$; pour $f\in L$, l'opérateur linéaire $f \to f_s$ définit un opérateur *unitaire* U_s dans $\mathcal{H}_\varphi$. Alors $s \to U_s$ est une *représentation unitaire continue* de G dans $\mathcal{H}_\varphi$.

Toute φ de type positif et bornée (donc située dans le dual L^∞ de L^1) *est presque partout égale à une fonction continue* (de type positif) (Gelfand et Raïkov, [2]). En effet :

Soit une g variable de L^1, vérifiant $\int g(x)\,dx=1$, et nulle en dehors d'un voisinage V de e, voisinage qui va être pris de plus en plus petit. Alors la mesure positive $g(x)\,dx$ converge étroitement vers la « masse 1 en e », et g, considéré comme élément de $\mathcal{H}_\varphi$, converge *faiblement* vers un élément ε de $\mathcal{H}_\varphi$; car $(g, g)_\varphi$ reste borné, et, pour toute $f\in L$, $(f, g)_\varphi$ tend, d'après la remarque précédente, vers la limite $\int\overline{\varphi(x)}f(x)\,dx$. Ainsi $(f, \varepsilon)_\varphi=\int\overline{\varphi(x)}f(x)\,dx$; plus généralement

$$(f, U_s\varepsilon)_\varphi=\lim_g(f, U_sg)_\varphi=\int\overline{\varphi(s^{-1}x)}f(x)\,dx.$$

On voit qu'on a

$$(f, g)_\varphi=\int(f, U_s\varepsilon)_\varphi g(s)\,ds \tag{1}$$

pour toute $f\in L$; et comme les deux membres sont fonctions continues de f (pour la topologie forte de $\mathcal{H}_\varphi$), la relation subsiste pour tout élément f de $\mathcal{H}_\varphi$. Elle prouve : si un $f\in\mathcal{H}_\varphi$ est orthogonal aux $U_s\varepsilon$, il est nul; autrement dit, $\mathcal{H}_\varphi$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant les transformés de ε par le groupe G; nous dirons que les $U_s\varepsilon$ *engendrent* $\mathcal{H}_\varphi$.

Appliquons (1) pour $f=\varepsilon$:

$$(\varepsilon, g)_\varphi=\int(\varepsilon, U_s\varepsilon)_\varphi\overline{g(s)}\,ds$$

pour toute $g\in L$; explicitons

$$\int\varphi(s)\overline{g(s)}\,ds=\int(\varepsilon, U_s\varepsilon)_\varphi\overline{g(s)}\,ds,$$

et par suite

$$\varphi(s)=(\varepsilon, U_s\varepsilon)_\varphi$$

presque partout; or le second membre est une fonction *continue* de s.

C. Q. F. D.

Remarque. — On vient de prouver que toute $\varphi(x)$ continue, de type positif, a la forme (X, U_xX), où (X, Y) désigne le produit scalaire dans un certain espace hilbertien $\mathcal{H}_\varphi$ et où $x \to U_x$ est une représentation unitaire continue de G dans $\mathcal{H}$. Réciproquement, toute fonction de la forme (X, U_xX) est de type positif.

5. *Fonctions élémentaires.* — Soit $\mathfrak{T}_0$ l'ensemble des φ continues, de type positif, telles que $\varphi(e) \leq 1$; ou encore le sous-ensemble des $\varphi \in L^\infty$, telles que $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ et que φ soit de type positif. La définition des fonctions de type positif montre immédiatement que $\mathfrak{T}_0$ est *fermé* pour la topologie *faible* de L^∞ (dual de L^1). En outre, $\mathfrak{T}_0$ est un *ensemble convexe*, et, bien entendu, est une partie *bornée* de L^∞. Un théorème de Krein et Milman ([5]) permet alors d'affirmer que : tout sous-ensemble *convexe* et *faiblement fermé* de $\mathfrak{T}_0$, qui contient les « points extrémaux » de $\mathfrak{T}_0$, est identique à $\mathfrak{T}_0$ tout entier.

Rappelons qu'un point x d'un ensemble convexe K est dit *extrémal* pour K si tout segment de droite contenu dans K et contenant x admet nécessairement x comme extrémité. Appliquons cette notion à $\mathfrak{T}_0$; on voit facilement que les points extrémaux de $\mathfrak{T}_0$ se composent :

1° de la fonction zéro (identiquement nulle);

2° des φ (continues de type positif) telles que $\varphi(e) = 1$, et jouissant de la propriété suivante : pour toute décomposition $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{T}_0)$ on a nécessairement $\varphi_1 \equiv \lambda_1 \varphi$, $\varphi_2 \equiv \lambda_2 \varphi$ (λ_1 et λ_2 constantes réelles ≥ 0 telles que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$).

Les fonctions φ de la catégorie 2° s'appellent *fonctions élémentaires.*

Théorème A. — *Pour qu'une φ continue, de type positif, telle que $\varphi(e) = 1$, soit élémentaire, il faut et il suffit que la représentation unitaire de G dans $\mathfrak{H}_\varphi$ soit irréductible; autrement dit, que $\{0\}$ et $\mathfrak{H}_\varphi$ soient les seuls sous-espaces vectoriels fermés de $\mathfrak{H}_\varphi$ invariants par les opérateurs U_x.*

Démonstration. — 1° Si φ est élémentaire, tout opérateur de projection orthogonale A, s'il est permutable aux U_x, est nécessairement E (identité) ou zéro, car

$$\varphi(x) = (\varepsilon, U_x \varepsilon)_\varphi = (A\varepsilon, U_x \varepsilon)_\varphi + (\varepsilon - A\varepsilon, U_x \varepsilon)_\varphi = (A\varepsilon, U_x A\varepsilon)_\varphi + (\varepsilon - A\varepsilon, U_x(\varepsilon - A\varepsilon))_\varphi$$

et le dernier membre est somme de deux fonctions de $\mathfrak{T}_0$; d'où

$$(A\varepsilon, U_x \varepsilon)_\varphi = \lambda(\varepsilon, U_x \varepsilon)_\varphi \qquad \text{pour tout } x \in G,$$

et par suite $A = \lambda E$, ce qui exige (puisque $A^2 = A$) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

2° Inversement, supposons irréductible la représentation $s \to U_s$ de G dans $\mathfrak{H}_\varphi$, et soit $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{T}_0)$. Pour $f \in L$, on aura $(f, f)_{\varphi_1} \leq (f, f)_\varphi$, donc $(f, f)_{\varphi_1}$ définit une forme hermitienne dans $\mathfrak{H}_\varphi$, et par suite un opérateur hermitien A tel que

$$(Af, f)_\varphi = (f, f)_{\varphi_1} \qquad \text{pour toute } f \in L.$$

([5]) Krein et Milman, *On extremal points of regularly convex sets* (*Studia Math.*, 1940). On trouvera une démonstration de ce théorème dans [3] (Chap. II, B).

On aura donc

$$(A\varepsilon, U_x\varepsilon)_\varphi = (\varepsilon, U_x\varepsilon)_{\varphi_1} = \varphi_1(x).$$

Comme A permute évidemment aux U_s, on a nécessairement $A = \lambda E$, et par suite $\varphi_1(x) \equiv \lambda\varphi(x)$; donc φ est élémentaire.

Remarque. — Le contenu des numéros 4 et 5 est dû essentiellement à Gelfand et Raïkov [2].

6. *Cas d'un groupe abélien.*

Théorème B. — *Si* G *est abélien, les fonctions élémentaires ne sont autres que les caractères continus du groupe* G.

Rappelons qu'une fonction $\chi(x)$ est un *caractère* de G si l'on a

$$\chi(x.y) = \chi(x)\,\chi(y), \qquad |\chi(x)| = 1.$$

Un tel caractère, s'il est continu, est évidemment une fonction de type positif telle que $\chi(e) = 1$. Reste à montrer que, pour une φ continue de type positif telle que $\varphi(e) = 1$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

α. la représentation de G dans $\mathcal{H}_\varphi$ est irréductible;
β. φ est un caractère.

Montrons que (α) entraîne (β). Les sous-espaces de la décomposition spectrale d'un opérateur U_s sont invariants par G, puisque U_s permute à tous les U_x; donc, si la représentation de G dans $\mathcal{H}_\varphi$ est irréductible, chaque U_s a la forme λE, où λ est un nombre complexe de valeur absolue égale à 1 (U_s est *unitaire*), et qui dépend continûment de s; la fonction $\lambda(s)$ est évidemment un caractère. L'espace $\mathcal{H}_\varphi$ est engendré par les $U_s\varepsilon = \lambda(s).\varepsilon$, donc est à *une* dimension, et

$$\varphi(s) = (\varepsilon, U_s\varepsilon) = \overline{\lambda(s)}$$

est un caractère continu.

Réciproquement, l'espace $\mathcal{H}_\chi$ associé à un caractère continu est de dimension *un*, donc donne lieu à une représentation irréductible, en sorte que tout caractère continu de G est une fonction élémentaire.

En tenant compte du théorème de Krein et Milman, on aboutit donc au

Théorème C. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact; désignons par* $\mathfrak{L}_0$ *l'ensemble des fonctions continues* φ, *de type positif, telles que* $\varphi(e) \leq 1$. *Alors tout ensemble convexe, fermé* (pour la topologie faible de L^∞), *contenant la constante zéro et les caractères de* G *contient* $\mathfrak{L}_0$.

III. — Transformation de Fourier. Théorèmes de Lebesgue et de Bochner.

7. *Dual d'un groupe abélien.* — G est désormais supposé *abélien*. Les caractères continus de G et la constante zéro forment un sous-ensemble G′ de $\mathfrak{L}_0$; les caractères seuls, un sous-ensemble $\hat{G}$. On va montrer que :

1° G′ est *faiblement fermé* dans $\mathfrak{L}_0$ (donc *compact* pour la topologie faible de L^∞), et par suite $\hat{G}$ est *localement compact*;

2° Sur $\hat{G}$, la topologie faible de L^∞ est aussi celle de la *convergence uniforme sur tout compact de* G (rappelons que les éléments de $\hat{G}$ sont des fonctions définies sur G).

Les deux propositions se montrent d'un seul coup en prouvant que, si un caractère variable λ converge *faiblement* vers une fonction φ de $\mathfrak{L}_0$, *autre que la constante zéro*, alors la convergence a lieu *uniformément sur tout compact de* G, en sorte que φ est lui-même un caractère de G.

Or, si $\varphi \not\equiv 0$, il existe une $f \in L$ telle que $\int \overline{\varphi(y)} f(y)\, dy \neq 0$. La fonction composée

$$\lambda \star f(x) = \int \lambda(y) f(y^{-1}x)\, dy = \int \lambda(xy^{-1}) f(y)\, dy$$

converge, uniformément sur tout compact, vers $\varphi \star f(x)$; mais on a

$$\lambda \star f(x) = \lambda(x) \int \overline{\lambda(y)} f(y)\, dy,$$

et $\int \overline{\lambda(y)} f(y)\, dy$ tend vers $\int \overline{\varphi(y)} f(y)\, dy \neq 0$. En faisant le quotient, on voit que $\lambda(x)$ converge uniformément sur tout compact; sa limite est $\varphi(x)$, puisque φ est déjà limite faible de λ. C. Q. F. D.

Notation. — Les éléments de G′ seront désignés par des lettres $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$; $(x, \hat{x})$ désignera la valeur, au point $x \in G$, du caractère $\hat{x}$ (si $\hat{x} \in \hat{G}$) et zéro si $\hat{x}$ est la fonction zéro.

8. *Transformée de Fourier d'une fonction de* L^1. — A chaque f, sommable pour la mesure de Haar, associons « sa transformée de Fourier »

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})} f(x)\, dx,$$

fonction définie sur G′, et en particulier sur $\hat{G}$. C'est une fonction *continue* sur G′, d'après la définition de la topologie faible de L^∞, dual de L^1. Cette fo[illegible]

tion $\hat{f}$ est nulle pour $\hat{x}=0$. En identifiant l'élément zéro de G' au « point à l'infini » dont l'adjonction à $\hat{G}$ le rend compact (théorème d'Alexandroff), on voit que $\hat{f}(\hat{x})$ tend vers zéro quand le caractère $\hat{x}$ « s'éloigne à l'infini » : c'est le *théorème de Lebesgue*.

Si $h=f\star g$ ($f\in L^1$, $g\in L^1$), il est clair que $h\in L^1$ et que $\hat{h}=\hat{f}.\hat{g}$. Donc les transformées de Fourier des $f\in L^1$ constituent un *anneau* $\mathfrak{A}$ de fonctions, à valeurs numériques complexes, jouissant des propriétés suivantes :

1° Ces fonctions sont définies et continues sur l'espace compact G' ;

2° Si une fonction $\hat{f}$ appartient à $\mathfrak{A}$, la fonction imaginaire conjuguée appartient aussi à $\mathfrak{A}$ (car c'est la transformée de Fourier de la fonction

$$\check{f}(x)=\overline{f(x^{-1})}$$

de L^1) ;

3° Toutes les fonctions de $\mathfrak{A}$ s'annulent pour $\hat{x}=0$; si $\hat{x}\neq\hat{y}$, il existe une $\hat{f}\in\mathfrak{A}$ telle que $\hat{f}(\hat{x})\neq\hat{f}(\hat{y})$ (sinon, $\hat{x}$ et $\hat{y}$ désigneraient le même élément de L^∞, donc de G').

Un théorème classique de *Stone* (6) permet de conclure :

Toute fonction complexe, continue sur G', et nulle pour $\hat{x}=0$, est limite *uniforme sur* G' de fonctions de $\mathfrak{A}$. En d'autres termes : *toute mesure complexe* $\hat{\mu}$, *portée par* $\hat{G}$, *de masse totale finie, et telle que l'on ait* $\int\hat{f}\,d\hat{\mu}=0$ *pour toute* $f\in L^1$, *est identiquement nulle.*

La conclusion subsiste si l'on suppose que $\int\hat{f}\,d\hat{\mu}=0$ a lieu pour les f d'un sous-espace partout dense de L^1.

9. *Transformée de Fourier d'une mesure de* $\hat{G}$. — Soit $\hat{\mu}$, de masse totale finie sur l'espace $\hat{G}$. Posons

$$\mathfrak{F}_{\hat{\mu}}(x)=\int(x,\hat{x})\,d\hat{\mu}(\hat{x})\,;$$

c'est une fonction *bornée* et *continue* de x. Si en outre $f\in L^1$, on a la relation évidente

$$\int\overline{\hat{f}(\hat{x})}\,d\hat{\mu}(\hat{x})=\int\overline{f(x)}\,\mathfrak{F}_{\hat{\mu}}(x)\,dx. \tag{2}$$

Théorème 1. — *Si* $\mathfrak{F}_{\hat{\mu}}(x)=0$ *pour tout* $x\in G$, *on a* $\hat{\mu}=0$ (unicité de la détermination d'une mesure $\hat{\mu}$ par la connaissance de sa transformée de Fourier).

En effet, on a alors $\int\hat{f}\,d\hat{\mu}=0$ pour toute $f\in L^1$.

---

(6) M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 41, 1937, pp. 375-481 ; cf. en particulier pp. 466-469).

THÉORÈME 2 (Bochner). — *Les fonctions de $\mathfrak{P}_0$ ne sont autres que les transformées de Fourier des mesures positives et de masse totale ≤ 1 portées par $\hat{G}$.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}_0$ l'ensemble des $\hat{\mu}$ positives portées par $\hat{G}$ et de masse totale ≤ 1. A chaque $\hat{\mu} \in \mathfrak{M}_0$, associons la fonction $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}}(x)$. Si $\hat{\mu}$ est une masse ponctuelle $+1$ placée en un point $\hat{y}$, $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}}(x) = (x, \hat{y})$ est un *caractère*. D'autre part, si une $\hat{\mu}_0$ est limite *vague* d'une $\hat{\mu}$ variable de $\mathfrak{M}_0$, on a $\int d\hat{\mu}_0 \leq 1$, et $\int \overline{\hat{f}}\, d\hat{\mu}_0 = \lim \int \overline{\hat{f}}\, d\hat{\mu}$ pour toute $f \in L^1$ (puisque $\hat{f} \in \hat{L}_\infty$), c'est-à-dire

$$\int \overline{f} \mathfrak{C}_{\hat{\mu}_0}\, dx = \lim \int f \mathfrak{C}_{\hat{\mu}}\, dx;$$

donc $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}_0}$ est *limite faible* de $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}}$. En particulier, comme toute $\hat{\mu}$ de $\mathfrak{M}_0$ est limite vague de mesures formées d'un nombre fini de masses ponctuelles positives dont la somme est ≤ 1, on voit que les $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}}$ (pour $\hat{\mu} \in \mathfrak{M}_0$) sont limites faibles de combinaisons linéaires de caractères, à coefficients positifs, et par suite appartiennent à $\mathfrak{P}_0$. L'application $\hat{\mu} \to \mathfrak{C}_{\hat{\mu}}$ de $\mathfrak{M}_0$ dans $\mathfrak{P}_0$ étant *continue* (pour la topologie vague de $\mathfrak{M}_0$ et la topologie faible de $\mathfrak{P}_0$), et $\mathfrak{M}_0$ étant *compact*, il s'ensuit que les $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}}$ forment un sous-ensemble faiblement compact (donc *faiblement fermé*) de $\mathfrak{P}_0$; ce sous-ensemble est en outre *convexe*, et contient les caractères de G; c'est donc (th. C) $\mathfrak{P}_0$ tout entier.

C. Q. F. D.

Remarque. — L'application biunivoque de $\mathfrak{M}_0$ sur $\mathfrak{P}_0$ qui vient d'être définie est *bicontinue* (lorsque $\mathfrak{M}_0$ est muni de la topologie vague et $\mathfrak{P}_0$ de la topologie faible). Mais elle est aussi bicontinue lorsqu'on considère sur $\mathfrak{M}_0$ la convergence *étroite*, et sur $\mathfrak{P}_0$ la *convergence uniforme sur tout compact*; en effet, la convergence étroite de $\hat{\mu}$ variable vers $\hat{\mu}_0$ entraîne la convergence uniforme sur tout compact de $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}}$ vers $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}_0}$; réciproquement, si $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}}$ converge *faiblement* vers $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}_0}$, et si en outre $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}}(e) = \int d\hat{\mu}$ converge vers $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}_0}(e) = \int d\hat{\mu}_0$, alors $\hat{\mu}$ converge étroitement vers $\hat{\mu}_0$, et par suite la convergence de $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}}$ vers $\mathfrak{C}_{\hat{\mu}_0}$ est uniforme sur tout compact.

IV. — La formule d'inversion de Fourier.

10. *Groupe dual.* — Le produit de deux caractères (au sens du produit de deux fonctions sur G) étant un caractère, et l'inverse d'un caractère étant un caractère, la multiplication des caractères définit sur $\hat{G}$ une *structure de groupe abélien*, compatible avec la topologie introduite sur $\hat{G}$ (n° 7). Le groupe topolo-

gique $\hat{G}$ est le *groupe dual* de G. Avec la notation $(x, \hat{x})$ (*cf.* n° 7), on aura les formules

$$(xy^{-1}, \hat{x}) = (x, \hat{x}).\overline{(y, \hat{x})}; \qquad (x, \hat{x}\hat{y}^{-1}) = (x, \hat{x}).\overline{(x, \hat{y})}.$$

Sur le groupe dual $\hat{G}$ on a une mesure de Haar, définie à un facteur près que l'on déterminera tout à l'heure (théorème d'inversion de Fourier).

11. *Le théorème d'inversion.* — $\mathcal{V}$ désignera désormais l'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients complexes) de fonctions continues de type positif sur le groupe G. On posera $\mathcal{V}^1 = \mathcal{V} \cap L^1$; $\mathcal{V}^2 = \mathcal{V} \cap L^2$. Puisque toute fonction de $\mathcal{V}$ est bornée, on a $\mathcal{V}^1 \subset \mathcal{V}^2$. D'autre part, toute fonction de la forme $f \star \tilde{f}$, où $f \in L$, est de type positif (7) et appartient à L, donc est dans $\mathcal{V}^1$; $\mathcal{V}^1$ contient donc tous les produits de composition $f \star g$ (où f et g sont dans L), qui forment un ensemble dense dans L^1. Ainsi $\mathcal{V}^1$ est dense dans L^1; de même, $\mathcal{V}^2$ est dense dans L^2.

Dans le groupe dual $\hat{G}$, on emploiera les notations $\hat{L}$, $\hat{L}^1$, $\hat{L}^2$, $\hat{\mathcal{V}}$, $\hat{\mathcal{V}}^1 = \hat{\mathcal{V}} \cap \hat{L}^1$, $\hat{\mathcal{V}}^2 = \hat{\mathcal{V}} \cap \hat{L}^2$.

D'après les théorèmes 1 et 2, toute f de $\mathcal{V}$ détermine univoquement une mesure complexe $\hat{\mu}_f$ sur $\hat{G}$, de masse totale finie, et telle que f soit la transformée de $\hat{\mu}_f$:

$$f(x) = \int (x, \hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x}).$$

Nous nous proposons de démontrer le

Théorème 3. — *On peut choisir le facteur arbitraire de la mesure de Haar $d\hat{x}$ sur $\hat{G}$ de manière que, pour toute $f \in \mathcal{V}^1$, on ait l'égalité des mesures*

$$d\hat{\mu}_f(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}. \tag{3}$$

En d'autres termes : *si $f \in \mathcal{V} \cap L^1$, la transformée*

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})}\, f(x)\, dx$$

est sommable pour $d\hat{x}$, et l'on a réciproquement

$$f(x) = \int (x, \hat{x})\, \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}. \qquad \textbf{(Formule d'inversion de Fourier).}$$

---

(7) La formule $f \star \tilde{f}(x) = \int f(y)\overline{f(x^{-1}y)}\, dy$ met en évidence le fait que $f \star \tilde{f}$ est de type positif (*cf.* la *Remarque* finale du n° 4).

12. *Démonstration du théorème d'inversion.*

LEMME 1. — *Si f et φ appartiennent à $\mathcal{V}^1$, on a l'égalité des mesures*

$$\hat{\varphi}(\hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{\mu}_\varphi(\hat{x}). \tag{4}$$

En effet, d'après le théorème 1, il suffit de prouver l'identité des transformées de Fourier de ces deux mesures : or ces transformées ne sont autres que $\varphi \star f$ et $f \star \varphi$.

On voit que la transformée $\hat{\varphi}$ d'une φ de $\mathcal{V}^1$ fait partie de la famille $\hat{\mathcal{F}}$ des $\Phi(\hat{x})$ *continues*, *bornées*, et qui jouissent de la propriété suivante : il existe, sur $\hat{G}$, une mesure complexe $\hat{\nu}_\Phi$ de *masse totale finie* telle que

$$\Phi(\hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{\nu}_\Phi(\hat{x}) \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{V}^1. \tag{4'}$$

Étudions de plus près cette famille $\hat{\mathcal{F}}$.

1° Si $\Phi \in \hat{\mathcal{F}}$, la mesure $\hat{\nu}_\Phi$ associée est *unique*. En effet, il existe sur $\mathcal{V}^1$ un filtre Λ suivant lequel $\hat{f}$ converge vers la constante 1 uniformément sur tout compact ([8]). La mesure $d\hat{\nu}_\Phi$ est alors limite vague de la mesure $\hat{f}\, d\hat{\nu}_\Phi$ [laquelle est univoquement déterminée d'après (4')], et par suite $\hat{\nu}_\Phi$ est univoquement déterminée par Φ.

2° Si la fonction Φ de $\hat{\mathcal{F}}$ est *positive*, la mesure associée est aussi *positive*. En effet, si $f = g \star \tilde{g}$ $(g \in \mathrm{L})$, la mesure $\hat{\mu}_f$ est positive (car f est de type positif), donc la mesure $\hat{f}\, d\hat{\nu}_\Phi$ est positive d'après (4'); quand f varie suivant le filtre Λ, $\hat{\nu}_\Phi$ est limite vague de mesures positives, donc est elle-même positive.

3° Si Φ est la transformée d'une φ de $\mathcal{V}^1$, alors Φ appartient à $\hat{\mathcal{F}}$, et $\hat{\nu}_\Phi = \hat{\mu}_\Phi$ d'après (4).

4° Si Φ_1 et Φ_2 appartiennent à $\hat{\mathcal{F}}$, il en est de même de $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, et $\hat{\nu}_\Phi = \hat{\nu}_{\Phi_1} + \hat{\nu}_{\Phi_2}$. En outre, si $\Phi \in \hat{\mathcal{F}}$ et si $\mathrm{A}(\hat{x})$ est une fonction *continue bornée* quelconque sur $\hat{G}$, la fonction $\Psi = \mathrm{A}\Phi$ appartient à $\hat{\mathcal{F}}$, et l'on a

$$d\hat{\nu}_\Psi(\hat{x}) = \mathrm{A}(\hat{x})\, d\hat{\nu}_\Phi(\hat{x}),$$

comme on le voit en multipliant les deux membres de (4') par $\mathrm{A}(\hat{x})$.

5° Si $\Phi \in \hat{\mathcal{F}}$, toute translatée Ψ de Φ appartient à $\hat{\mathcal{F}}$, et pour obtenir $\hat{\nu}_\Psi$ on effectue sur $\hat{\nu}_\Phi$ la même translation. Cela résulte de ce que, si l'on multiplie f par un caractère de G, $\hat{f}$ et $\hat{\mu}_f$ subissent une même translation.

([8]) *Cf.* n° 18.

La démonstration du théorème 3 va maintenant se faire en trois étapes :

a. Toute fonction Ψ *de* $\hat{\mathrm{L}}$ *appartient à* $\hat{\mathscr{F}}$. — En effet, il existe une $f \in \mathscr{D}^1$ dont la transformée est très voisine de 1 (donc $\neq 0$) sur le compact en dehors duquel Ψ est identiquement nulle. On a donc $\Psi = \mathrm{A}.\hat{f}$, où A est continue et bornée; or $\hat{f}$ est dans $\hat{\mathscr{F}}$, donc aussi Ψ (propriété 4°).

b. Choix de la mesure de Haar. — Associons à toute Ψ de $\hat{\mathrm{L}}$ le nombre $\int d\hat{\nu}_\Psi$. On a ainsi une fonctionnelle *additive* (propriété 4°), *positive* (propriété 2°) et enfin *invariante par translation* (propriété 5°) : c'est donc la mesure de Haar $d\hat{x}$ sur $\hat{\mathrm{G}}$, mesure dont le facteur arbitraire se trouve ainsi fixé sans ambiguïté; à condition toutefois que l'on prouve que cette mesure n'est pas identiquement nulle. Or si f appartient à $\mathscr{D}^1$ et n'est pas identiquement nulle, la mesure $\hat{\mu}_f$ n'est pas identiquement nulle, donc il existe une A de $\hat{\mathrm{L}}$ telle que la mesure $\mathrm{A}\,d\hat{\mu}_f$ ne soit pas non plus identiquement nulle; si alors on prend $\Psi = \mathrm{A}.\hat{f}$, on a $d\hat{\nu}_\Phi = \mathrm{A}\,d\hat{\mu}_f$ (d'après 3° et 4°), donc $\hat{\nu}_\Psi$ n'est pas nulle.

Cela étant, le choix que l'on vient de faire de la mesure de Haar $d\hat{x}$ permet d'écrire

$$\int \Psi(\hat{x})\,d\hat{x} = \int d\hat{\nu}_\Psi(\hat{x}) \qquad \text{pour toute} \quad \Psi \in \hat{\mathrm{L}}. \tag{5}$$

c. Démonstration de la formule (3). — Soit Φ une fonction quelconque de $\hat{\mathscr{F}}$. Pour toute A de $\hat{\mathrm{L}}$, la fonction $\Psi = \mathrm{A}.\Phi$ appartient à $\hat{\mathrm{L}}$, et, d'après 4°, on a $d\hat{\nu}_\Psi = \mathrm{A}\,d\hat{\nu}_\Phi$. La formule (5) donne alors

$$\int \mathrm{A}(\hat{x})\,\Phi(\hat{x})\,d\hat{x} = \int \mathrm{A}(\hat{x})\,d\hat{\nu}_\Phi(\hat{x}) \qquad \text{pour toute} \quad \mathrm{A} \in \hat{\mathrm{L}},$$

d'où l'égalité annoncée des mesures

$$\Phi(\hat{x})\,d\hat{x} = d\hat{\nu}_\Phi(\hat{x}). \tag{6}$$

Ceci étant, soit $f \in \mathscr{D}^1$; prenons pour Φ la fonction $\hat{f}$, d'où (d'après 2°) $\hat{\nu}_\Phi = \hat{\mu}_f$; la formule (6) donne la relation (3) cherchée, ce qui démontre le théorème 3.

13. *Corollaires du théorème d'inversion.*

Corollaire 1 du théorème 3. — *Si f continue de type positif est sommable pour dx, sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est positive* (en effet, d'après le théorème 3, $\hat{f}$ est sommable, et f est transformée de Fourier de la mesure $\hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x}$ qui, d'après les théorèmes 1 et 2, est positive).

En particulier, on a $\hat{f}(\hat{e}) \geq 0$, d'où

$$\int f(x)\,dx \geq 0$$

pour toute f sommable, continue, de type positif. En fait, ce résultat vaut encore si l'on abandonne l'hypothèse de la continuité, comme on le voit en « régularisant » ([9]).

COROLLAIRE 2 DU THÉORÈME 3. — *Soit $F(\hat{x})$ une fonction sommable pour $d\hat{x}$; si sa transformée*

$$f(x) = \int (x, \hat{x})\, F(\hat{x})\, d\hat{x}$$

est sommable pour dx, on a presque partout

$$F(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})}\, f(x)\, dx.$$

Plus généralement, si une mesure $\hat{\mu}$ de masse totale finie sur $\hat{G}$ est telle que sa transformée de Fourier

$$f(x) = \int (x, \hat{x})\, d\hat{\mu}(\hat{x}) \tag{7}$$

soit sommable pour dx, alors on a $d\hat{\mu}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}$.

En effet, d'après (7), on a $f \in \mathfrak{V}$; si en outre $f \in L^1$, d'après le théorème 3, f est transformée de Fourier de la mesure $\hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}$, et aussi de $d\hat{\mu}(\hat{x})$: d'où l'égalité de ces deux mesures.

Remarque. — Si $f \in \mathfrak{V}^1$, alors $\hat{f}$ appartient à $\hat{\mathfrak{V}}$, comme on le voit en décomposant f en $f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$, où les f_i sont positives et sommables (alors les $\hat{f}_i$ sont de type positif sur $\hat{G}$ comme on le vérifie immédiatement). Le théorème 3 affirme donc que *la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathfrak{V}^1$ appartient à $\hat{\mathfrak{V}}^1$.* (Quand on aura identifié, plus loin, le groupe G au dual de $\hat{G}$, on pourra affirmer que $f \to \hat{f}$ est une *application biunivoque de $\mathfrak{V}^1$ sur $\hat{\mathfrak{V}}^1$*).

V. — Le théorème de Plancherel.

14. Rappelons que $\mathfrak{V}^1 \subset \mathfrak{V}^2 \subset L^2$; de même, $\hat{\mathfrak{V}}^1 \subset \hat{\mathfrak{V}}^2 \subset \hat{L}^2$. On peut donc considérer la transformation de Fourier comme définie entre parties de L^2 et $\hat{L}^2$. On va voir qu'en fait cette transformation est prolongeable en un *isomorphisme de L^2 sur $\hat{L}^2$.*

Soit une $f \in \mathfrak{V}^1$; montrons que *la norme $\|f\|_2$ de f dans L^2 est égale à la norme $\|\hat{f}\|_2$ de $\hat{f}$ dans $\hat{L}^2$.* Plus généralement, *si $f \in L^1 \cap L^2$, sa transformée appartient à $\hat{L}^2$ et donc à $\hat{\mathfrak{V}}^2$.* En effet, la fonction $g = f \star \tilde{f}$ est dans $\mathfrak{V}^1$, donc sa transformée $\hat{g} = |\hat{f}|^2$ est dans $\hat{\mathfrak{V}}^1$; par suite, $\hat{f}$ est de carré sommable pour $d\hat{x}$.

([9]) *Voir* [4], § 2; et [3], Introduction, § 4.

De plus, la formule d'inversion de Fourier appliquée à g donne $g(e)=\int \hat{g}(\hat{x})d\hat{x}$, c'est-à-dire en explicitant

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De là résulte que l'application $f \to \hat{f}$, qui est déjà définie dans $L^1 \cap L^2$ (partout dense dans L^2) peut être prolongée en une application de L^2 *dans* $\hat{L}^2$, avec toujours $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Inversement, partons d'une $F \in \hat{L}^1 \cap \hat{L}^2$, et soit

$$\mathfrak{G}_F(x) = \int (x, \hat{x})\, F(\hat{x})\, d\hat{x}$$

la transformée de la mesure $F(\hat{x})d\hat{x}$. Je dis que $\mathfrak{G}_F$ *appartient à* L^2 ; en effet, la relation (2) (§ III) montre que, pour toute $f \in L^1 \cap L^2$, on a

$$\int \overline{\hat{f}(\hat{x})}\, F(\hat{x})\, d\hat{x} = \int \overline{f(x)}\, \mathfrak{G}_F(x)\, dx; \tag{8}$$

le second membre est donc en module inférieur ou égal à

$$\|\hat{f}\|_2 . \|F\|_2 = \|f\|_2 . \|F\|_2.$$

Il en résulte bien que $\mathfrak{G}_F \in L^2$, et que $\|\mathfrak{G}_F\|_2 \leq \|F\|_2$. Bien entendu, la relation (8) s'étend au cas où f est une fonction quelconque de L^2, et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier définie par prolongement.

Voici en passant une application de (8) : *la transformée* $\hat{f}$ *d'une* f *de* $\mathfrak{D}^2$ *est sommable pour* $d\hat{x}$ (le théorème 3 affirmait seulement que $\hat{f}$ est sommable lorsque $f \in \mathfrak{D}^1$). En effet, appliquons (8) à une F transformée de Fourier d'une φ de $\mathfrak{D}^1$; on a donc $F = \hat{\varphi}$, $\mathfrak{G}_F = \varphi$ (th. 3), d'où

$$\int \overline{\hat{f}(\hat{x})}\, \hat{\varphi}(\hat{x})\, d\hat{x} = \int \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx. \tag{9}$$

Puisque $f \in \mathfrak{D}$, il existe une mesure $\hat{\mu}_f$ de masse totale finie, et une seule, telle que $f(x) = \int (x, \hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x})$. En remplaçant $f(x)$ par cette valeur dans (9), il vient

$$\int \hat{\varphi}(\hat{x})\, \overline{\hat{f}(\hat{x})}\, d\hat{x} = \int \hat{\varphi}(\hat{x})\, \overline{d\hat{\mu}_f(\hat{x})} \qquad \text{pour toute } \varphi \text{ de } \mathfrak{D}^1 ;$$

or $\mathfrak{D}^1$ est partout dense dans L^1, ce qui exige (n° 8) l'égalité des mesures $\hat{f}(\hat{x})d\hat{x}$ et $d\hat{\mu}_f(\hat{x})$: donc $\hat{f}$ est sommable.

15. Théorème 4. — *L'application* $f \to \hat{f}$ *de* L^2 *dans* $\hat{L}^2$, *définie plus haut, est un isomorphisme de* L^2 *sur* $\hat{L}^2$.

Il suffit de montrer que *les transformées* $\hat{f}$ *des* $f \in \mathfrak{V}^1$ *sont partout denses dans* $\hat{L}^2$. Pour cela, il suffit de prouver le

LEMME 2. — *Toute fonction* $F \star G$ *(où* F *et* $G \in \hat{L}$*) est transformée de Fourier d'une fonction de* $\mathfrak{V}^1$.

En effet, de $H = F \star G$ résulte $\mathfrak{E}_H = \mathfrak{E}_F . \mathfrak{E}_G$, donc $\mathfrak{E}_H$, produit de deux fonctions de L^2 (n° 14), est sommable, et par suite appartient à $\mathfrak{V}^1$. Il en résulte (corollaire 2 du théorème 3) que H est transformée de Fourier de $\mathfrak{E}_H$.

C. Q. F. D.

VI. — Théorie de la dualité.

16. A chaque x de G associons la fonction $\overline{(x, \hat{x})}$ de la variable $\hat{x} \in \hat{G}$. C'est un caractère continu de $\hat{G}$, donc un élément du dual $\hat{\hat{G}}$ de $\hat{G}$, élément que nous noterons $\alpha(x)$.

THÉORÈME 5. — *La représentation* $x \to \alpha(x)$ *de* G *dans* $\hat{\hat{G}}$ *est un isomorphisme du groupe topologique* G *sur le groupe topologique* $\hat{\hat{G}}$.

Montrons d'abord que c'est un isomorphisme du groupe topologique G sur un sous-groupe $\alpha(G)$ de $\hat{\hat{G}}$. Autrement dit : pour que $y = \lim x$ dans G, il faut et il suffit que $\alpha(x) = \lim \alpha(x)$ dans $\hat{\hat{G}}$. Or $y = \lim x$ signifie évidemment que $f(y) = \lim f(x)$ pour toute f de $\mathfrak{V}^1$, ce qui s'écrit

$$\int (y, \hat{x}) \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x} = \lim \int (x, \hat{x}) \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}. \tag{10}$$

Lorsque f parcourt $\mathfrak{V}^1$, les $\hat{f}$ parcourent un sous-ensemble partout dense de $\hat{L}^1$ (d'après le lemme du n° 15), donc (10) exprime que la fonction $(x, \hat{x})$ (fonction de $\hat{x}$) converge faiblement, dans $\hat{L}^\infty$, vers la fonction $(y, \hat{x})$: autrement dit, que le caractère $\alpha(x)$ converge vers le caractère $\alpha(y)$ au sens de la topologie de $\hat{\hat{G}}$.

Cela étant, le sous-groupe $\alpha(G)$ de $\hat{\hat{G}}$ est localement compact (puisque isomorphe à G), donc il est *fermé* dans $\hat{\hat{G}}$ (*cf.* BOURBAKI, *Top. gén.*, Chap. III, § 2, exercice 6). Pour achever de démontrer le théorème, il ne reste plus qu'à prouver que tout ensemble ouvert non vide de $\hat{\hat{G}}$ rencontre $\alpha(G)$. D'après le lemme 2, il revient au même de prouver : si une fonction F, sur $\hat{\hat{G}}$, est transformée d'une fonction $\hat{f}$ de $\hat{\mathfrak{V}}^1$ et s'annule identiquement sur $\alpha(G)$, elle est identiquement nulle. Or soit

$$F(\hat{x}) = \int \overline{(\hat{x}, \hat{\hat{x}})} \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}.$$

On a par hypothèse

$$f(x)=\int (x,\hat{x})\hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x}=0$$

pour tout $x\in G$, ce qui exige (th. 1) $\hat{f}\equiv 0$, donc $F\equiv 0$. C. Q. F. D.

17. *Sous-groupes et groupes quotients.*

Théorème 6. — *Soit* Γ *un sous-groupe fermé de* G, *et soit* Γ' *le sous-groupe de* $\hat{G}$ *orthogonal à* Γ (c'est-à-dire le sous-groupe des $\hat{x}$ tels que $(x,\hat{x})=1$ pour tout $x\in\Gamma$). *Alors tout élément* $x\in G$ *qui est orthogonal à* Γ' *appartient à* Γ.

(On observera que la démonstration que nous allons donner de cette propriété aurait pu se placer dès la fin du paragraphe II.)

Lemme 3. — *Pour qu'une fonction f de* $\mathcal{Y}$ *soit invariante par* Γ, *il faut et il suffit que la mesure* $\hat{\mu}_f$ *dont elle est la transformée soit portée par le sous-groupe* Γ' *orthogonal à* Γ.

En effet, la condition est évidemment suffisante. Réciproquement, supposons $f(sx)=f(x)$ pour tout $s\in\Gamma$ et tout $x\in G$; on a donc, pour $s\in\Gamma$,

$$\int (x,\hat{x})\,(s,\hat{x})\,d\hat{\mu}_f(\hat{x})=\int (x,\hat{x})\,d\hat{\mu}_f(\hat{x}) \qquad \text{quel que soit } x\in G,$$

d'où (th. 1)

$$(s,\hat{x})\,d\hat{\mu}_f(\hat{x})=d\hat{\mu}_f(\hat{x}) \qquad \text{pour tout } s\in\Gamma.$$

Ainsi l'ensemble (ouvert) des points $\hat{x}$ où $(s,\hat{x})\neq 1$ est de mesure nulle pour $\hat{\mu}_f$; sur le noyau fermé de $\hat{\mu}_f$, on a donc $(s,\hat{x})=1$ pour tout $s\in\Gamma$, ce qui signifie précisément que ce noyau est contenu dans Γ'.

Ce lemme étant établi, la formule

$$f(x)=\int (x,\hat{x})\,d\hat{\mu}_f(\hat{x})$$

montre que si $f\in\mathcal{Y}$ est invariante par Γ, f est aussi invariante par le sous-groupe de G orthogonal à Γ'. Le théorème 6 sera prouvé si nous montrons : pour chaque $s\notin\Gamma$ (rappelons que Γ est supposé *fermé* dans G), il existe une $f\in\mathcal{Y}$ invariante par Γ, et telle que $f(s)\neq f(e)$. Or la f cherchée va provenir d'une fonction φ sur le groupe quotient G/Γ; sur ce groupe, il existe en effet une fonction continue, nulle en dehors d'un ensemble compact, qui soit combinaison linéaire de fonctions de type positif, et qui prenne en un point s différent de l'élément neutre une valeur autre qu'en ce dernier point : il suffit de prendre un produit de composition convenable sur le groupe G/Γ.

Le théorème 6 étant démontré, on en déduit aisément les résultats de Weil ([1], p. 108-109), et notamment celui-ci : *si* Γ *est un sous-groupe fermé de* G, *le groupe dual de* Γ *est isomorphe au groupe quotient* $\hat{G}/\Gamma'$ (Γ' *désignant le sous-groupe fermé de* $\hat{G}$ *orthogonal à* Γ).

VII. — Compléments.

18. *Approximation d'une fonction quelconque par des produits de composition.*

Lemme α [relatif à la Note (8) du n° 12]. — *Il existe sur* $\mathfrak{F}^1$ *un filtre* Λ *suivant lequel* $\hat{f}$ *converge vers la constante un uniformément sur toute partie compacte de* $\hat{G}$.

Démonstration. — K désignant un voisinage compact de e, désignons par A_K l'ensemble des $g \in L^-$ qui sont nulles en dehors de K, et vérifient en outre $\int g(x)\,dx = 1$. Soit B_K l'ensemble des $f = g \star \tilde{g}$ où g décrit A_K. Ces f sont à la fois *positives* (au sens ordinaire), *de type positif* et *nulles en dehors de voisinages compacts de e* (qui convergent vers e avec K); de plus

$$\int f(x)\,dx = \left(\int g(x)\,dx\right)^2 = 1.$$

Il est clair alors que les B_K constituent sur $\mathfrak{F}^1$, une *base de filtre* Λ, et que la mesure $f(x)\,dx$ converge étroitement, suivant Λ, vers la masse -1 en e. Alors

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})} f(x)\,dx$$

converge, uniformément sur tout compact de $\hat{G}$, vers la constante *un*.

C. Q. F. D.

Conséquences du lemme α. — Comme $f \in L^-$, on a $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{F}}^1$. Donc : *sur tout groupe abélien localement compact* G, *on peut approcher la constante un, uniformément sur tout compact, par des fonctions continues, sommables et de type positif sur* G.

(Si $G = R$, groupe additif des nombres réels, on peut prendre par exemple la suite

$$f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}};$$

ce qui explique l'intervention de ces fonctions dans certains exposés classiques.)

Plus généralement, *toute fonction continue φ de type positif* sur G est limite, uniforme sur tout compact, de fonctions de $\mathfrak{P}^1$. Car si $f \in \mathfrak{P}^1$ tend vers 1, $f\varphi \in \mathfrak{P}^1$ tend vers φ.

LEMME β. — *Toute $f \in \mathfrak{P}^1$ est de la forme*

$$f(x) = g \star \tilde{g}(x) = \int g(y)\,\overline{g(x^{-1}y)}\,dy,$$

où $g \in L^2$.

Il suffit de prendre pour g la transformée de Fourier de $\sqrt{\hat{f}(\hat{x})}$ (cette dernière fonction est dans $\hat{L}^2$, puisque $\hat{f}$ est *positive* et *sommable*).

C. Q. F. D.

Comme g est limite *forte* dans L^2 de fonctions $h \in L$, il en résulte que f est limite *uniforme sur* G, de fonctions $h \star \tilde{h} \in \mathfrak{P} \cap L$. Finalement, on a le

THÉORÈME 7. — *Toute fonction continue et de type positif sur G est limite, uniformément sur tout compact, de fonctions de la forme $h \star \tilde{h}$, où $h \in L$.*

19. *Cas particulier des groupes compacts et des groupes discrets.*

Si G est discret, $\hat{G}$ est compact. — Il suffit de montrer que le point $o \in G'$ (notations du n° 7) est *isolé* dans G'. Or, considérons la fonction $\varepsilon(x)$ égale à 1 si $x = e$, à 0 si $x \neq e$; on a $\varepsilon \in L^1$, et si l'on choisit la mesure de Haar dx de manière que chaque point de G porte une masse 1, la transformée de Fourier de ε est la fonction $\hat{\varepsilon}(\hat{x})$ égale à 0 si $\hat{x} = o$, à 1 si $\hat{x} \in \hat{G}$. Comme $\hat{\varepsilon}$ est *continue* sur G', la proposition est démontrée. En outre, la formule d'inversion, pour la fonction ε, donne, pour $x = e$, $\int d\hat{x} = 1$.

Si G est compact, $\hat{G}$ est discret. — En effet, prenons sur G la mesure de Haar dont la masse totale est égale à 1, et cherchons la transformée de Fourier $\hat{\varepsilon}$ de la fonction $\varepsilon(x)$ égale à 1 pour tout $x \in G$. On a évidemment $\hat{\varepsilon}(\hat{e}) = 1$; si nous montrons que $\hat{\varepsilon}(\hat{x}) = 0$ pour tout $\hat{x} \neq \hat{e}$, nous aurons prouvé ($\hat{\varepsilon}$ étant continue sur $\hat{G}$) que $\hat{G}$ est discret. Or la fonction $(y, \hat{x})\hat{\varepsilon}(\hat{x})$ est identique à $\hat{\varepsilon}(\hat{x})$, et cela pour tout $y \in G$; donc si un $\hat{x}$ est tel que $\hat{\varepsilon}(\hat{x}) \neq 0$, on a $(y, \hat{x}) = 1$ pour tout y, d'où $\hat{x} = \hat{e}$. C'est ce que nous voulions démontrer. En outre, la mesure de Haar $d\hat{x}$ que la formule d'inversion attache à $\hat{G}$ porte une masse 1 en chaque point de $\hat{G}$.

Si G n'est ni compact ni discret, il en est de même de $\hat{G}$, puisque G est isomorphe au dual de $\hat{G}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (*Actual. Scient. et Ind.*, n° 869, Paris, 1940).

[2]. I. Gelfand et D. Raïkov, *Irreducible unitary representations of arbitrary locally bicompact groups* (*Recueil Math. Moscou*, 13, 1943, p. 316).

[3]. R. Godement, *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes* (*Thèse*, Paris, juillet 1946).

[4]. H. Cartan, *Sur les fondements de la théorie du potentiel* (*Bull. Soc. Math. de France*, 69, 1941, p. 71).

[5]. J. Dieudonné, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 59, 1942, p. 107-139).

[6]. N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I (*Actual. Scient. et Ind.*, n° 858, Paris, 1940).

[7]. S. Bochner, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale* (Leipzig, 1932).

[8]. S. Bochner, *Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse* (*Math. Ann.*, 108, 1933, p. 378).

[9]. N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications* (Cambridge U. P., 1933).

[10]. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals* (Oxford, 1937).

[11]. T. Carleman, *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent* (Uppsala, 1944).

Note. — Nous avons pris connaissance en novembre 1946 d'un Mémoire de D. A. Raïkov [*Harmonic Analysis on commutative groups with the Haar measure and the theory of characters* (*Travaux de l'Inst. Math. Stekloff*, 14, 1945, p. 5-86)]. Ce Mémoire constitue un exposé, au moyen de la théorie des anneaux normés, des questions traitées dans le présent article.

SUR

LES PRODUITS TENSORIELS

PAR M. JEAN DIEUDONNÉ.

1. On doit à H. Whitney (1) la définition générale du *produit tensoriel* de deux *modules* unitaires (2) quelconques E, F sur un même anneau d'opérateurs *commutatif* A (supposé avoir un élément unité): c'est un A-module noté $E \otimes F$, dont nous ne reproduirons pas ici la définition, mais dont nous rappellerons la propriété fondamentale (qui le caractérise à une isomorphie près) : *il existe une application bilinéaire* φ *de* $E \times F$ *dans* $E \otimes F$, *telle que* : 1° $\varphi(E \times F)$ *engendre* $E \otimes F$; 2° *si* G *est un* A*-module quelconque, f une application bilinéaire de* $E \times F$ *dans* G, *il existe une application linéaire g de* $E \otimes F$ *dans* G *telle que l'on ait identiquement* $g[\varphi(x, y)] = f(x, y)$.

On pose $\varphi(x, y) = x \otimes y$; tout élément de $E \otimes F$ est donc de la forme $\sum_i (x_i \otimes y_i)$, mais peut en général se mettre sous cette forme d'une infinité de manières.

Nous utiliserons les lemmes suivants, qu'on démontre dans la théorie générale des produits tensoriels (1) :

LEMME 1. — *Soit* M *un sous-module de* E, N *un sous-module de* F. *Le module* $(E/M) \otimes (F/N)$ *est isomorphe au module* $(E \otimes F)/\Gamma(M, N)$, *où* $\Gamma(M, N)$ *est le sous-module de* $E \otimes F$ *engendré par les éléments* $x \otimes y$ *tels que* $x \in M$ *ou* $y \in N$.

On définit un isomorphisme (dit canonique) de $(E/M) \otimes (F/N)$ sur $(E \otimes F)/\Gamma(M, N)$ en faisant correspondre au produit tensoriel $\overline{x} \otimes \overline{y}$ d'une

(1) H. WHITNEY, *Tensor products of abelian groups* (*Duke Math. J.*, t. 4, 1938, p. 495-528). La définition de Whitney ne concerne que les modules par rapport à l'anneau des entiers rationnels, mais s'étend aussitôt au cas général. La forme sous laquelle nous utilisons la théorie générale des produits tensoriels est due à H. Cartan.

(2) Nous dirons qu'un A-module E est *unitaire* si (en désignant par ε l'élément unité de A) on a, pour tout $x \in E$, $\varepsilon x = x$.

classe $\bar{x}$ modulo M et d'une classe $\bar{y}$ modulo N, la classe modulo $\Gamma(M, N)$ d'un élément (quelconque) $x \otimes y$, où x appartient à $\bar{x}$ et y à $\bar{y}$.

LEMME 2. — *Si* E *est somme directe d'une famille* (E_i) *de sous-modules,* F *somme directe d'une famille* (F_j) *de sous-modules, le module* $E \otimes F$ *est isomorphe à la somme directe des modules* $E_i \otimes F_j$. *En particulier, si* (a_i) *est une base* (3) *de* E, (b_j) *une base de* F, *les éléments* $a_i \otimes b_j$ *forment une base de* $E \otimes F$.

LEMME 3. — *Le produit tensoriel* $A \otimes E$ *est isomorphe à* E.

On définit un isomorphisme (dit canonique) de $A \otimes E$ sur E en faisant correspondre au produit tensoriel $\alpha \otimes x$ ($\alpha \in A$, $x \in E$) l'élément αx de E.

2. Une particularité des produits tensoriels est qu'on peut avoir $x \otimes y = 0$ bien que $x \neq 0$ et $y \neq 0$ [ce qui signifie que toute fonction bilinéaire définie dans $E \times F$ s'annule nécessairement pour l'élément (x, y)]. Un exemple classique est le suivant : E est le groupe cyclique d'ordre 2, F le groupe cyclique d'ordre 3 (l'anneau d'opérateurs A étant ici l'anneau des entiers rationnels); alors, quels que soient $x \in E$, $y \in F$, on a

$$x \otimes y = 3(x \otimes y) - 2(x \otimes y) = x \otimes (3y) - (2x) \otimes y = 0$$

puisque $2x = 0$ et $3y = 0$; dans ce cas $E \otimes F$ est réduit à zéro, il n'y a pas de fonction bilinéaire non identiquement nulle dans $E \times F$.

Dans cet exemple, les *annulateurs* (4) de x et de y ne se réduisent pas à zéro; on peut se demander si, lorsqu'on impose à x et y la condition d'être *libres* tous deux (c'est-à-dire d'avoir des annulateurs nuls), on a toujours $x \otimes y \neq 0$. Nous allons voir qu'il en est bien ainsi, en démontrant le théorème plus précis suivant :

THÉORÈME 1. — *Si* x *est libre dans* E, *et* y *libre dans* F, *on a* $\lambda(x \otimes y) \neq 0$ *pour tout* $\lambda \in A$ *non nilpotent* (5).

On sait que, si un A-module G est engendré par une famille $(x_\nu)_{\nu \in N}$, où N est un ensemble d'indices quelconque, G est isomorphe au *quotient* H/M d'un module H ayant une *base* $(a_\nu)_{\nu \in N}$ dont N est l'ensemble d'indices, l'isomorphisme de H/M sur G faisant correspondre à la classe modulo M de a_ν l'élément x_ν.

---

(3) Rappelons qu'une *base* de E est définie de la façon suivante : c'est une famille (finie ou non) (a_i) d'éléments de E telle que tout élément x de E se mette d'une seule manière sous la forme $\sum_I \lambda_i a_i$, où les λ_i sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

(4) L'*annulateur* d'un élément x d'un A-module E est l'ensemble des éléments λ de de A tels que $\lambda x = 0$; c'est un *idéal* de A. On dit que x est *libre* si son annulateur se réduit à zéro.

(5) Rappelons qu'un élément λ d'un anneau A est dit *nilpotent* s'il existe un entier n tel que $\lambda^n = 0$.

Considérons donc E et F comme deux modules quotients E′/M, F′/N, où E′ admet une base (a_α), F′ une base (b_β); comme on peut toujours prendre x (resp. y) parmi les générateurs de E (resp. F), on peut toujours supposer que x (resp. y) est la classe modulo M (resp. modulo N) d'un élément de la base (a_α) [resp. (b_β)], que nous désignerons par a_1 (resp. b_1).

Cela étant, d'après le lemme 1, l'hypothèse $\lambda(x\otimes y)=0$ équivaut à une relation de la forme

$$\lambda(a_1\otimes b_1)=\sum_\mu u_\mu\otimes u'_\mu+\sum_\nu v_\nu\otimes v'_\nu, \tag{1}$$

où les familles (finies) d'éléments u_μ, u'_μ, v_ν, v'_ν sont telles que $u_\mu\in M$, $u'_\mu\in F'$, $v_\nu\in E'$, $v'_\nu\in N$. Si l'on remplace chaque u'_μ par son expression $\sum_\beta \rho_{\mu\beta}b_\beta$ à l'aide de la base (b_β), on a

$$\sum_\mu u_\mu\otimes u'_\mu=\sum_\mu\left(\sum_\beta(\rho_{\mu\beta}u_\mu)\otimes b_\beta\right)=\sum_\beta\left(\sum_\mu\rho_{\mu\beta}u_\mu\right)\otimes b_\beta;$$

comme M est un A-module, chacun des éléments $x_\beta=\sum_\mu \rho_{\mu\beta}u_\mu$ appartient à M; opérant de même sur la seconde somme du second membre de (1), on obtient la relation

$$\lambda(a_1\otimes b_1)=\sum_\beta x_\beta\otimes b_\beta+\sum_\alpha a_\alpha\otimes y_\alpha, \tag{2}$$

où $x_\beta\in M$ et $y_\alpha\in N$ pour tous les indices α, β; naturellement, il n'y a qu'un nombre fini d'indices β (resp. α) tels que $x_\beta\neq 0$ (resp. $y_\alpha\neq 0$); en changeant les notations, on peut donc supposer que, dans (2), l'indice β varie de 1 à n, l'indice α de 1 à m. Posons alors $x_\beta=\sum_\alpha\xi_{\alpha\beta}a_\alpha$, $y_\alpha=\sum_\beta\eta_{\alpha\beta}b_\beta$; d'après le lemme 2 la relation (2) équivaut au système d'équations

$$\xi_{11}+\eta_{11}=\lambda,\qquad \xi_{\alpha\beta}+\eta_{\alpha\beta}=0\qquad \text{pour}\quad(\alpha,\beta)\neq(1,1). \tag{3}$$

L'hypothèse que x est libre dans E équivaut à la suivante : il n'existe aucun scalaire $\rho\neq 0$ tel que ρa_1 appartienne à M; de même le fait que y est libre dans F signifie qu'il n'existe aucun scalaire $\sigma\neq 0$ tel que σb_1 appartienne à N. Or, nous allons voir que l'existence des relations (3) est incompatible avec ces hypothèses, ce qui prouvera le théorème.

Considérons pour cela la matrice à m lignes et n colonnes formée par les $\xi_{\alpha\beta}$, que nous écrirons

$$A=\begin{pmatrix}\xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n}\\ \xi_{21} & & & \\ \xi_{31} & & B & \\ \vdots & & & \\ \xi_{m1} & & & \end{pmatrix}$$

B étant la matrice à $m-1$ lignes et $n-1$ colonnes formée par les $\xi_{\alpha\beta}$ dont les deux indices sont $\neq 1$. La colonne d'indice β de la matrice A n'est autre que le vecteur x_β; d'après (3), la ligne d'indice α de A est le vecteur $-y_\alpha$, sauf pour $\alpha=1$, où cette ligne est égale à $\lambda b_1 - y_1$. Nous allons voir que, dans ces conditions (et compte tenu de l'hypothèse que λ n'est pas nilpotent), ou bien il existe $\rho \neq 0$ tel que ρa_1 soit combinaison linéaire des x_β, ou bien il existe $\sigma \neq 0$ tel que σb_1 soit combinaison linéaire des y_α, conclusion incompatible avec l'hypothèse.

Supposons d'abord qu'il y ait un mineur δ d'ordre $r>0$ de la matrice B tel que le produit de δ et d'une puissance quelconque de λ ne soit pas nul, mais qu'il existe une puissance λ^p telle que les produits par λ^p de tous les mineurs de B d'ordre $>r$ contenant δ, soient tous nuls. On peut toujours supposer, par une permutation des lignes et des colonnes de A, que δ est le déterminant de la matrice carrée C des $\xi_{\alpha\beta}$ tels que $2\leq\alpha\leq r+1$, $2\leq\beta\leq r+1$.

Supposons d'abord qu'il existe un indice $\beta>r+1$ tel que le produit par λ^p du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} & \cdots & \xi_{1,r+1} & \xi_{1\beta} \\ & & & & \xi_{2\beta} \\ & & C & & \vdots \\ & & & & \xi_{r+1,\beta} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul. Alors, en vertu de l'hypothèse, on a

$$\lambda^p \Delta a_1 = \lambda^p \Delta_2 x_2 + \lambda^p \Delta_3 x_3 + \ldots + \lambda^p \Delta_{r+1} x_{r+1} + \lambda^p \Delta_\beta x_\beta,$$

où $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{r+1}, \Delta_\beta$ désignent les cofacteurs des éléments de la première ligne de Δ. De même, s'il existe un indice $\alpha>r+1$ tel que le produit par λ^p du déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \xi_{21} & & & \\ \xi_{31} & & & \\ \vdots & & C & \\ \xi_{r+1,1} & & & \\ \xi_{\alpha 1} & \xi_{\alpha 2} & \cdots & \xi_{\alpha,r+1} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul, on voit qu'il existe un $\sigma \neq 0$ tel que σb_1 soit combinaison linéaire des y_α.

Si maintenant les produits par λ^p de tous les déterminants tels que Δ et Δ' sont nuls, considérons le déterminant

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1,r+1} \\ \xi_{21} & & & \\ \vdots & & C & \\ \xi_{r+1,1} & & & \end{vmatrix}$$

Si le produit $\lambda^p \Delta_0 \neq 0$, on a encore

$$\lambda^p \Delta_0 a_1 = \lambda^p \Delta_1 x_1 + \lambda^p \Delta_2 x_2 + \ldots + \lambda^p \Delta_{r+1} x_{r+1},$$

où $\Delta_1, \ldots, \Delta_{r+1}$ sont les cofacteurs de la première ligne de Δ_0 (Δ_1 n'étant autre que δ). Si au contraire $\lambda^p\Delta_0 = 0$, on a cette fois

$$\lambda^{p+1}\delta b_1 = \lambda^p\Delta'_1 y_1 + \lambda^p\Delta'_2 y_2 + \ldots + \lambda^p\Delta'_{r+1} y_{r+1},$$

où $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{r+1}$ sont les cofacteurs de la première colonne de Δ_0 (avec $\Delta'_1 = \delta$).

Il nous reste à examiner le cas où il existe une puissance λ^p dont le produit par tous les éléments de B est nul. Dans ce cas, s'il existe un indice $\beta > 1$ tel que $\lambda^p\xi_{1\beta} \neq 0$, on a $\lambda^p\xi_{1\beta}a_1 = \lambda^p x_\beta$; de même, s'il existe un indice $\alpha > 1$ tel que $\lambda^p\xi_{\alpha 1} \neq 0$, on a $\lambda^p\xi_{\alpha 1}b_1 = -\lambda^p y_\alpha$. Si, pour tout $\beta > 1$ et tout $\alpha > 1$ on a $\lambda^p\xi_{1\beta} = \lambda^p\xi_{\alpha 1} = 0$, et si $\lambda^p\xi_{11} \neq 0$, on a $\lambda^p\xi_{11}a_1 = \lambda^p x_1$; enfin, si l'on a aussi $\lambda^p\xi_{11} = 0$, on a $\lambda^{p+1}b_1 = \lambda^p y_1$. La démonstration du théorème est donc achevée.

3. On peut se demander si l'hypothèse que λ n'est pas nilpotent est essentielle pour la validité du théorème 1. Nous allons voir que tel est bien le cas, en construisant des exemples appropriés.

Soit K un corps commutatif quelconque; prenons pour A une algèbre commutative sur K, ayant une base formée de l'élément unité 1, et de deux éléments c_1, c_2, avec la table de multiplication $c_1^2 = c_1c_2 = c_2c_1 = c_2^2 = 0$. Nous prendrons pour E le module A^2/M, où M est le sous-module de A^2 engendré par les éléments (c_1, c_1) et (c_1, c_2); pour F le sous-module A^2/N, où N est le sous-module de A^2 engendré par les éléments $(0, -c_1)$ et $(-c_1, -c_2)$; si x est la classe modulo M de l'élément $a_1 = (1, 0)$ de A^2, y la classe modulo N du même élément, on a $c_1(x \otimes y) = 0$, car on établit aussitôt dans $A^2 \otimes A^2$ une relation de la forme (2). D'autre part, x est *libre* dans E; en effet, si pour un élément $\rho \neq 0$ de A, ρa_1 était de la forme $\alpha(c_1, c_1) + \beta(c_1, c_2)$, on aurait $\alpha c_1 + \beta c_1 = \rho$, $\alpha c_1 + \beta c_2 = 0$ pour des éléments convenables α, β de A; or, on a par hypothèse $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$, $\beta = \beta_0 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$, les α_i et β_i étant dans K; d'après la table de multiplication de A, on ne peut avoir $\alpha c_1 + \beta c_2 = 0$ que si $\alpha_0 = \beta_0 = 0$; mais alors on a nécessairement $\alpha c_1 + \beta c_1 = 0$. On démontre de la même manière que y est libre dans F.

Dans cet exemple, on a $E \neq F$; en le modifiant légèrement, on peut faire en sorte que $E = F$, et $y = x$. On prendra cette fois pour A l'algèbre commutative ayant une base formée de l'élément unité 1 et de quatre éléments c_1, c_2, c_3, c_4, le produit de deux quelconques des c_i étant nul; E sera le module A^3/M, où M est le module engendré par les six éléments $(c_1, c_1, 0)$, $(c_2, 0, c_3)$, $(0, c_3, 0)$, $(0, -c_2, 0)$, $(-c_1, 0, -c_3)$, $(0, -c_4, 0)$; enfin x est la classe modulo M de l'élément $(1, 0, 0)$ de A^3. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, dans ces conditions, x est libre, et que $c_1(x \otimes x) = 0$.

4. Ajoutons encore deux remarques au sujet du théorème 1. En premier lieu, supposons que chacun des modules E, F admette un système de générateurs *fini*, ayant au plus r éléments. Alors, en reprenant la démonstration du

théorème 1, on voit sans peine que l'on peut remplacer l'hypothèse que λ n'est pas nilpotent par celle que $\lambda^{r+1} \neq 0$.

D'autre part, si l'un des deux modules E, F admet une *base*, on peut démontrer très simplement une propriété plus précise que le théorème 1 : si par exemple F admet une base (b_μ), et si x est *libre* dans E, et $y \neq 0$ dans F, on a $x \otimes y \neq 0$; en effet, si $y = \sum_\mu \eta_\mu b_\mu$ on a $x \otimes y = \sum_\mu \eta_\mu x \otimes b_\mu$, et comme $\eta_\mu x \neq 0$ pour un indice μ au moins, il résulte du lemme 2 que $x \otimes y \neq 0$. Si l'on suppose en outre que y est *libre* dans F, alors le résultat précédent, appliqué à x et à ρy, où $\rho \neq 0$ est quelconque, montre que $x \otimes y$ est *libre* dans $E \otimes F$.

5. Le théorème 1 montre que, si A n'a pas d'élément nilpotent autre que zéro, $x \otimes y$ est libre dans $E \otimes F$ lorsque x est libre dans E et y libre dans F. Il en est ainsi en particulier lorsque A est un *anneau d'intégrité* (c'est-à-dire *sans diviseur de* zéro).

Dans ce dernier cas, on pourrait croire que, si *tout élément* $\neq 0$ de chacun des modules E, F est *libre* (ce qu'on exprime en disant que E et F sont des modules *réguliers*), le module $E \otimes F$ est aussi un module *régulier*. Nous allons voir, par un exemple, qu'il n'en est rien en général : chacun des éléments $x \otimes y$ ($x \neq 0$, $y \neq 0$) est bien libre, mais il y aura des combinaisons linéaires $\sum_i x_i \otimes y_i$ non nulles, qui ne seront pas libres.

Prenons pour A l'anneau $K[X, Y]$ des polynomes à deux indéterminées sur un corps K, pour E l'idéal $(X)+(Y)$ de l'anneau A (ensemble des polynomes sans terme constant). Nous allons voir que, dans le produit tensoriel $E \otimes E$, l'élément $X \otimes Y - Y \otimes X$ *n'est pas nul*; il est immédiat par ailleurs que cet élément n'est pas libre, car on a $XY(X \otimes Y - Y \otimes X) = (XY) \otimes (XY) - (XY) \otimes (XY) = 0$.

Pour voir que $X \otimes Y \neq Y \otimes X$, il suffit de prouver qu'il existe une application bilinéaire f de $E \times E$ dans un A-module convenable F, telle que $f(X, Y) \neq f(Y, X)$. Prenons pour F le module quotient A/E; comme tout polynome de A est congru modulo E à son terme de degré zéro, on peut identifier A/E à K, en convenant que le produit d'un élément de K par un élément quelconque de l'idéal E est nul. Comme tout élément de E est de la forme $PX + QY$, où P et Q sont quelconques dans A, il suffit, pour définir une application bilinéaire f de $E \times E$ dans F, de connaître $f(X, X)$, $f(X, Y)$, $f(Y, X)$ et $f(Y, Y)$; en outre, il faut vérifier que pour $PX + QY = 0$, on a

$$f(PX + QY, Z) = f(Z, PX + QY) = 0$$

quel que soit Z dans E; mais comme la relation $PX + QY = 0$ dans A entraîne $P = RY$ et $Q = -RX$ (R élément de A), on a

$$f(PX + QY, Z) = RY f(X, Z) - RX f(Y, Z),$$

et tout élément de F est annulé par X et par Y; on vérifie de même que $f(Z, PX + QY) = 0$, et on voit donc qu'on peut prendre *arbitrairement* dans F les éléments $f(X, X)$, $f(X, Y)$, $f(Y, X)$ et $f(Y, Y)$, et en particulier $f(X, Y) \neq f(Y, X)$.

6. L'exemple que nous venons de donner illustre une autre particularité importante des produits tensoriels. Considérons deux modules E et F, et soit M un sous-module de E, N un sous-module de F. A tout élément du produit tensoriel $M \otimes N$, de la forme $x \otimes y$, on peut faire correspondre l'élément $x \otimes y$ du produit tensoriel $E \otimes F$ (x et y étant considérés comme des éléments de M resp. N dans le premier cas, comme des éléments de E resp. F dans le second); on définit ainsi une application linéaire φ, que nous appellerons l'application *canonique* de $M \otimes N$ dans $E \otimes F$. L'exemple du n° 5 prouve que cette application *n'est pas nécessairement un isomorphisme*; en effet, $E \otimes E$ n'est pas un module régulier, et $A \otimes A$, qui est isomorphe à A d'après le lemme 3, est régulier; l'application canonique de $E \otimes E$ dans $A \otimes A$ ne peut donc être biunivoque.

Dans l'anneau d'opérateurs A de cet exemple, on sait que la théorie des idéaux est déjà assez complexe. C'est sans doute là qu'il faut chercher la raison du comportement paradoxal des produits tensoriels de modules sur un tel anneau. Nous allons voir en effet que de tels phénomènes ne peuvent se produire lorsque A est un *anneau de Dedekind*, c'est-à-dire un anneau d'intégrité dans lequel tout idéal se décompose d'une seule manière en un produit d'idéaux premiers [ou, ce qui revient au même, un anneau d'intégrité dans lequel les idéaux entiers et fractionnaires (non nuls) forment un *groupe multiplicatif*]. De façon précise, nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Théorème 2. — *Soit* A *un anneau de Dedekind,* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *deux idéaux* (*non nuls*) *dans* A. *L'application canonique* φ *du produit tensoriel* $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ *dans* $A \otimes A$ (*identifié à* A) *est un isomorphisme, et l'image* $\varphi(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})$ *est l'idéal produit* $\mathfrak{ab}$.

La dernière partie du théorème est vraie sans aucune hypothèse sur l'anneau A, et résulte aussitôt de la définition de φ et de la définition du produit de deux idéaux.

Pour démontrer la première partie, nous nous appuierons sur le lemme classique suivant de la théorie des anneaux de Dedekind :

Lemme 4. — *Étant donnés deux idéaux* $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ *dans un anneau de Dedekind, il existe un idéal* $\mathfrak{n}$, *premier à* $\mathfrak{m}$, *et tel que l'idéal produit* $\mathfrak{ln}$ *soit principal.*

De ce lemme, on déduit le résultat suivant, qui nous servira aussi :

Lemme 5. — *Étant donnés deux idéaux* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *dans un anneau de Dedekind* A, *le module quotient* $\mathfrak{a}/\mathfrak{ab}$ *est isomorphe à* $A/\mathfrak{b}$.

En effet, il existe un idéal $\mathfrak{c}$ premier avec $\mathfrak{b}$ et tel que $\mathfrak{ac}=(d)$ soit principal; de la relation $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=(1)$, on tire $\mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}=\mathfrak{a}$, autrement dit $\mathfrak{a}=\mathfrak{ab}+(d)$; dans toute classe modulo $\mathfrak{ab}$ contenue dans $\mathfrak{a}$, il existe donc un élément de la forme xd; si à tout $x\in A$ on fait correspondre la classe de xd modulo $\mathfrak{ab}$, on définit donc un homomorphisme de A sur $\mathfrak{a}/\mathfrak{ab}$; en outre, la relation $xd\equiv yd$ (mod. $\mathfrak{ab}$) signifie que $\mathfrak{ab}$ divise l'idéal $(x-y)(d)=(x-y)\mathfrak{ac}$, donc que $\mathfrak{b}$ divise $(x-y)\mathfrak{c}$; comme $\mathfrak{b}$ est premier avec $\mathfrak{c}$, la relation précédente équivaut à $x\equiv y$ (mod. $\mathfrak{b}$), ce qui démontre le lemme.

Cela posé, nous distinguerons plusieurs cas dans la démonstration du théorème 2.

(A) : $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$. Il est bien connu que l'idéal $\mathfrak{a}$ peut toujours se mettre sous la forme $(a)+(b)$, autrement dit, est engendré par deux éléments. Nous aurons besoin ici d'une forme un peu plus précise de ce résultat, qui dérive également du lemme 4. Soit a un élément de $\mathfrak{a}$; on peut donc écrire $(a)=\mathfrak{ac}$; d'après le lemme 4, il existe un idéal $\mathfrak{b}$ premier avec $\mathfrak{ac}$, et tel que $\mathfrak{ab}=(b)$ soit principal; $\mathfrak{b}$ étant *a fortiori* premier avec $\mathfrak{c}$, de la relation $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=(1)$, on déduit $\mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}=\mathfrak{a}$, c'est-à-dire $\mathfrak{a}=(a)+(b)$.

Étudions les applications bilinéaires de $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ dans un A-module quelconque F : comme tout élément de $\mathfrak{a}$ est de la forme $\lambda a+\mu b$, il est clair qu'une telle application f est déterminée lorsqu'on connaît $f(a,a)$, $f(a,b)$, $f(b,a)$ et $f(b,b)$. Réciproquement, si l'on se donne ces éléments dans F, ils déterminent une application bilinéaire de $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ dans F, pourvu que, pour tout couple d'éléments α, β de A tels que $\alpha a=\beta b$, on ait

$$f(\alpha a-\beta b,x)=f(x,\alpha a-\beta b)=0$$

quel que soit x dans $\mathfrak{a}$, ce qui revient aux quatre conditions

$$\alpha f(a,a)=\beta f(b,a), \tag{4}$$

$$\alpha f(a,b)=\beta f(b,b), \tag{5}$$

$$\alpha f(a,a)=\beta f(a,b), \tag{6}$$

$$\alpha f(b,a)=\beta f(b,b). \tag{7}$$

Nous allons déduire de ces relations qu'on a nécessairement $f(a,b)=f(b,a)$. En effet, de la relation $\alpha a=\beta b$, on déduit $(\alpha)\mathfrak{ac}=(\beta)\mathfrak{ab}$, donc $(\alpha)\mathfrak{c}=(\beta)\mathfrak{b}$, et comme $\mathfrak{b}$ est premier avec $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ divise (α), autrement dit $\alpha\in\mathfrak{b}$; réciproquement, si $\alpha\in\mathfrak{b}$, on a $(\alpha a)\subset(a)\mathfrak{b}=\mathfrak{abc}=(b)\mathfrak{c}\subset(b)$, donc il existe $\beta\in A$ tel que $\alpha a=\beta b$; donc l'ensemble des α tels qu'il existe β satisfaisant $\alpha a=\beta b$ est l'idéal $\mathfrak{b}$, et l'on voit de même que l'ensemble des β est l'idéal $\mathfrak{c}$. Cela étant, on tire de (5) et (7) que $\alpha[f(a,b)-f(b,a)]=0$, et de (4) et (6) que $\beta[f(a,b)-f(b,a)]=0$; l'élément $f(a,b)-f(b,a)$ de F est par suite annulé par tous les éléments de $\mathfrak{b}$ et tous ceux de $\mathfrak{c}$: il est donc annulé par

tous les éléments de $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=(1)$ et en particulier par 1, ce qui signifie que $f(a, b)=f(b, a)$.

Les relations (4), (5), (6), et (7) se réduisent donc aux deux relations

$$\alpha f(a, a)=\beta f(a, b), \tag{8}$$

$$\alpha f(a, b)=\beta f(b, b) \tag{9}$$

pour tout couple d'éléments α, β tels que $\alpha a=\beta b$.

Nous allons déduire de là la structure du produit tensoriel $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$. Considérons le A-module A^3, et sa base canonique formée des éléments $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$ et $e_3=(0, 0, 1)$; soit M le sous-module de A^3 engendré par les éléments de l'une des formes $\alpha e_1-\beta e_2$, $\alpha e_2-\beta e_3$, lorsque (α, β) parcourt l'ensemble des couples tels que $\alpha a=\beta b$; le module $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$ est *isomorphe au module quotient* A^3/M. En effet, soient $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ les classes modulo M de e_1, e_2, e_3, éléments qui engendrent A^3/M; on définit une application bilinéaire θ de $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ dans A^3/M en prenant $\theta(a, a)=\bar{e}_1$, $\theta(a, b)=\theta(b, a)=\bar{e}_2$, $\theta(b, b)=\bar{e}_3$, car les conditions (8) et (9) sont vérifiées par définition de M. Il est clair que $\theta(\mathfrak{a}\times\mathfrak{a})$ engendre A^3/M. Enfin, soit N un A-module quelconque, f une application bilinéaire quelconque de $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ dans N; soit h l'application linéaire de A^3 dans N telle que $h(e_1)=f(a, a)$, $h(e_2)=f(a, b)=f(b, a)$, $h(e_3)=f(b, b)$: d'après les conditions (8) et (9), h s'annule dans le sous-module M de A^3, donc peut se mettre d'une seule manière sous la forme $h=g\circ\omega$, où ω est l'homomorphisme canonique de A^3 sur A^3/M, et g une application linéaire de A^3/M dans N; cela étant, on a $g[\theta(a, a)]=f(a, a)$, $g[\theta(a, b)]=f(a, b)$, $g[\theta(b, b)]=f(b, b)$, donc $g[\theta(x, y)]=f(x, y)$ quels que soient x et y dans $\mathfrak{a}$; l'isomorphie de $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$ et de A^3/M est donc établie, en raison de ce qui a été rappelé au n° 1; dans cette isomorphie, l'élément $(\lambda a+\mu b)\otimes(\lambda' a+\mu' b)$ de $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$ correspond à l'élément $\lambda\lambda'\bar{e}_1+(\lambda\mu'+\lambda'\mu)\bar{e}_2+\mu\mu'\bar{e}_3$ de A^3/M.

Cela étant, l'application canonique φ de $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{a}^2$ fait correspondre à $(\lambda a+\mu b)\otimes(\lambda' a+\mu' b)$ l'élément $\lambda\lambda' a^2+(\lambda\mu'+\lambda'\mu)ab+\mu\mu' b^2$ de A; identifiant $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$ et A^3/M, on voit donc que φ fait correspondre à l'élément $\lambda\bar{e}_1+\mu\bar{e}_2+\nu e_3$ l'élément $\lambda a^2+\mu ab+\nu b^2$; le théorème sera démontré (pour $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$) si l'on établit que la relation $\lambda a^2+\mu ab+\nu b^2=0$ entraîne $\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3=0$, c'est-à-dire $\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3\in M$. Or, de $\lambda a^2+\mu ab+\nu b^2=0$, on déduit que dans A, b divise λa^2, donc que $\mathfrak{ab}$ divise $(\lambda)\mathfrak{a}^2\mathfrak{c}^2$, et par suite que $\mathfrak{b}$ divise (λ), puisque $\mathfrak{b}$ a été pris premier avec $\mathfrak{ac}$; on en déduit que $(b)=\mathfrak{ab}$ divise $(\lambda)\mathfrak{a}$, et *a fortiori* $(\lambda)\mathfrak{ac}=(\lambda a)$; autrement dit, il existe α tel que $\lambda a=\alpha b$; l'hypothèse entraîne que $(\alpha+\mu)a+\nu b=0$, donc on peut écrire

$$\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3=(\lambda e_1-\alpha e_2)+\big((\alpha+\mu)e_2+\nu e_3\big),$$

et le raisonnement précédent prouve que $\lambda e_1-\alpha e_2$ et $(\alpha+\mu)e_2+\nu e_3$ appartiennent à M, ce qui achève dans ce cas la démonstration.

(B) : $\mathfrak{b}$ divise $\mathfrak{a}$. Posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$; nous allons considérer le produit tensoriel $(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \otimes \mathfrak{a}$; d'après le lemme 5, il est isomorphe à $(A/\mathfrak{c}) \otimes \mathfrak{a}$; nous allons d'abord voir que ce produit tensoriel est *isomorphe à* $A/\mathfrak{c}$. En effet, d'après le lemme 1, il est isomorphe à $(A \otimes \mathfrak{a})/\psi(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a})$, ψ désignant l'application canonique de $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a}$ dans $A \otimes \mathfrak{a}$; or, d'après le lemme 3, l'application canonique de $A \otimes \mathfrak{a}$ dans A est un isomorphisme, et le composé de cet isomorphisme et de ψ n'est autre que l'application canonique θ de $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a}$ dans A; $(A \otimes \mathfrak{a})/\psi(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a})$ est donc isomorphe à $\mathfrak{a}/\theta(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{a})$, qui est identique à $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{c}$, et par suite isomorphe à $A/\mathfrak{c}$ d'après le lemme 5.

Cela étant, le produit tensoriel $(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}) \otimes \mathfrak{a}$ est d'autre part, d'après le lemme 1, isomorphe à $(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$, ω désignant l'application canonique de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a}$. Soit φ l'application canonique de $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a}$ dans $A \otimes A = A$; l'application canonique χ de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ dans A est composée de φ et de ω; comme on a vu dans la partie (A) de la démonstration que cette application est un isomorphisme, il s'ensuit que l'intersection du sous-module $M = \overline{\varphi}^{1}(o)$ de $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a}$, et du sous-module $\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$, se réduit à zéro; si M n'est pas réduit à zéro, le sous-module $[M + \omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})]/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$ du module $(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$ n'est donc pas réduit à zéro. D'autre part, le module quotient $\varphi(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/\chi(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$, identique à $\mathfrak{a}\mathfrak{b}/\mathfrak{a}^2$, et par suite (lemme 5), isomorphe à $A/\mathfrak{c}$, est isomorphe au module quotient $(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/[M + \omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})]$, c'est-à-dire au module quotient de $(\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{a})/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$ par le sous-module $[M + \omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})]/\omega(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})$.

En résumé, nous voyons que si M n'est pas réduit à zéro, le module quotient $A/\mathfrak{c}$ est isomorphe à son quotient par un de ses sous-modules non réduit à zéro; cela est impossible en raison du théorème de Jordan-Hölder, car le module $A/\mathfrak{c}$ a une longueur finie.

(C) : $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ quelconques. Soit $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ le plus petit commun multiple des idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ divisent $\mathfrak{c}$; nous poserons $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{d}$. Considérons le produit tensoriel $(\mathfrak{a}/\mathfrak{c}) \otimes \mathfrak{b}$; il est isomorphe (lemme 5) à $(A/\mathfrak{d}) \otimes \mathfrak{b}$, donc à $A/\mathfrak{d}$ d'après le raisonnement fait dans la partie (B) de la démonstration.

D'autre part (lemme 1), ce produit tensoriel est isomorphe à $(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})/\psi(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b})$. ψ désignant l'application canonique de $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$. Soit φ l'application canonique de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ dans A; l'application canonique θ de $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b}$ dans A est composée de φ et de ψ; or, θ est un isomorphisme d'après la partie (B) de la démonstration ($\mathfrak{b}$ divisant $\mathfrak{c}$); donc l'intersection du sous-module $M = \overline{\varphi}^{1}(o)$ de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ et du sous-module $\psi(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b})$ se réduit à zéro. D'autre part, le module quotient $\varphi(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b})/\theta(\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{b})$ est identique à $\mathfrak{a}\mathfrak{b}/\mathfrak{c}\mathfrak{b}$, donc isomorphe à $A/\mathfrak{d}$. On en déduit, par le même raisonnement que dans (B), que si M n'était pas réduit à zéro, le module $A/\mathfrak{d}$ serait isomorphe à son quotient par un sous-module non réduit à zéro, ce qui est absurde. Le théorème 2 est ainsi complètement démontré.

7. En nous appuyant sur le théorème 2, nous allons maintenant démontrer le théorème général suivant :

THÉORÈME 3. — *Soient* A *un anneau de Dedekind,* E *et* F *deux modules réguliers sur* A. *Le produit tensoriel* $E \otimes F$ *est un module régulier sur* A; *en outre, si* M *est un sous-module quelconque de* E, N *un sous-module quelconque de* F, *l'application canonique de* $M \otimes N$ *dans* $E \otimes F$ *est un isomorphisme.*

Remarquons d'abord que la première partie du théorème est une conséquence de la seconde. En effet, on sait ([6]) que E et F peuvent être « plongés » respectivement dans deux espaces vectoriels E', F' par rapport au corps des quotients K de l'anneau A. Or, le produit tensoriel $E' \otimes F'$ des A-modules E' et F' est régulier : en effet, en vertu de l'existence d'une base dans tout espace vectoriel, E' et F' sont sommes directes de modules isomorphes à K; d'après le lemme 2, tout revient à considérer le produit $K \otimes K$, et l'on voit sans peine que ce dernier est isomorphe à K; donc le A-module $E' \otimes F'$ est somme directe de sous-modules isomorphes à K, et par suite est régulier. Alors (en vertu de la seconde partie du théorème), $E \otimes F$, isomorphe à un sous-module du module régulier $E' \otimes F'$, est lui-même régulier.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, nous allons nous ramener au cas où chacun des modules E et F admet *un nombre fini de générateurs.* Supposons en effet qu'il existe des éléments x_i de M et des éléments y_i de N tels que $\sum_i x_i \otimes y_i$ ne soit pas nul quand on considère les produits tensoriels $x_i \otimes y_i$ *dans* $M \otimes N$, mais soit nul quand on les considère *dans* $E \otimes F$; il existe alors un sous-module E_1 de E et un sous-module F_1 de F, ayant chacun un nombre fini de générateurs, tels que les x_i appartiennent à E_1, les y_i à F_1, et qu'on ait

$$\sum_i x_i \otimes y_i = 0$$

lorsqu'on considère les produits tensoriels *dans* $E_1 \otimes F_1$ ([7]). En effet, d'après la définition des produits tensoriels ([1]), la somme formelle $\sum_i (x_i, y_i)$ est identique à une combinaison linéaire d'un nombre *fini* d'éléments z_γ de l'une des formes

$$(x, y+y') - (x, y) - (x, y'), \qquad (x+x', y) - (x, y) - (x', y),$$
$$(\alpha x, y) - \alpha(x, y), \qquad (x, \alpha y) - \alpha(x, y).$$

([6]) *Cf.* C. CHEVALLEY, *L'arithmétique dans les algèbres de matrices* (*Actual. Scient. et Ind.*, n° 323, Paris, Hermann, 1936), p. 27-30.

([7]) Je dois cette remarque à A. Weil.

Si E_1 (resp. F_1) est le sous-module de E (resp. F) engendré par les x_i (resp. y_i) et par tous les éléments de E (resp. F) qui figurent dans l'expression (de l'une des formes précédentes) de l'un au moins des éléments z_ν, E_1 et F_1 répondent à la question. Cela étant, il est clair qu'on a $\sum_i (x_i \otimes y_i) \neq 0$ lorsqu'on considère les produits tensoriels *dans* $(E_1 \cap M) \otimes (F_1 \cap N)$; on est donc bien ramené au cas où E et F admettent chacun un système fini de générateurs.

Mais on sait alors (8) que E est somme directe d'un nombre fini de sous-modules E_i, dont chacun est isomorphe à un idéal (non nul) de A, et M somme directe de sous-modules M_i, tels que $M_i = \mathfrak{a}_i E_i$ pour chaque indice i, $\mathfrak{a}_i$ étant un idéal (éventuellement nul) de A; on a une décomposition analogue pour F et N. D'après le lemme 2, tout revient donc à démontrer le théorème lorsque E et F sont deux idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ de A, M et N deux idéaux $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ tels que $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{b}$. Or, l'application canonique θ de $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{d}$ dans A est composée de l'application canonique ψ de $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$ dans A, et de l'application canonique φ de $\mathfrak{c} \otimes \mathfrak{d}$ dans $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}$. Comme le théorème 2 prouve que θ est un isomorphisme, φ est nécessairement lui aussi un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

8. A l'aide des résultats qui précèdent, nous allons maintenant considérer le produit tensoriel $E \otimes F$ de deux modules unitaires *quelconques* sur un *anneau de Dedekind* A, et montrer comment on peut déterminer l'*annulateur* d'un élément z de ce module, de la forme $x \otimes y$.

Nous utiliserons le fait qu'un idéal $\mathfrak{a}$ dans un anneau de Dedekind est entièrement déterminé quand on connaît la puissance (≥ 0) de chaque idéal premier qui figure dans la décomposition de l'idéal $\mathfrak{a}$, ce que nous appellerons la *contribution* de l'idéal premier dans $\mathfrak{a}$. On convient que la contribution de tout idéal premier dans l'idéal nul est $+\infty$.

D'autre part, nous introduirons, pour simplifier, la terminologie suivante : pour tout $x \in E$ et tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, nous dirons que l'*ordre* de x par rapport à $\mathfrak{p}$ est la contribution de $\mathfrak{p}$ dans l'idéal annulateur de x; nous appellerons d'autre part la *hauteur* de x par rapport à $\mathfrak{p}$ la borne supérieure des contributions de $\mathfrak{p}$ dans les idéaux principaux (λ), lorsque λ parcourt l'ensemble des éléments de A tels qu'il existe un $y \in E$ et un $\alpha \in A$ *non divisible par* $\mathfrak{p}$, satisfaisant à la relation $\alpha x = \lambda y$; la hauteur de x par rapport à $\mathfrak{p}$ est donc un entier fini ou $+\infty$. On peut la définir de façon légèrement différente : soit π un élément de $\mathfrak{p}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}^2$ (lemme 4); supposons qu'on ait $\alpha x = \lambda y$, où α est premier avec $\mathfrak{p}$ et où la contribution de $\mathfrak{p}$ dans (λ) est h; on peut écrire $(\lambda) = \mathfrak{p}^h \mathfrak{b}$, où $\mathfrak{b}$ est premier avec $\mathfrak{p}$; par hypothèse on a $(\pi) = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est premier avec $\mathfrak{p}$; on a donc $(\lambda)\mathfrak{a}^h = (\pi^h)\mathfrak{b}$; soit $\mathfrak{c}$ un idéal premier avec $\mathfrak{p}$,

(8) C. CHEVALLEY, *loc. cit.*, p. 32-33.

tel que l'idéal $\mathfrak{a}''\mathfrak{c}$ soit un idéal principal (β); on aura $(\lambda\beta)=(\pi^h)\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, ce qui montre que $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ est un idéal principal, autrement dit, $\lambda\beta=\pi^h\gamma$, où β et γ sont premiers avec $\mathfrak{p}$. De l'hypothèse $\alpha x=\lambda y$ on tire donc $\alpha\beta x=\pi^h(\gamma y)$, et comme $\alpha\beta$ est premier avec $\mathfrak{p}$, on peut dire que la hauteur de x est la borne supérieure des entiers h tels qu'il existe un $z\in\mathrm{E}$ et un $\lambda\in\mathrm{A}$ non divisible par $\mathfrak{p}$, satisfaisant à $\lambda x=\pi^h z$.

Cette nouvelle forme de la définition permet d'établir aisément le lemme suivant, qui nous sera utile.

Lemme 6. — *Soit* E *un module sur un anneau de Dedekind* A, *somme directe d'un nombre fini de sous-modules* E_i. *Soit* x *un élément de* E, x_i *le composant de* x *dans* E_i, *de sorte que* $x=\sum_i x_i$. *Si* ν_i *est l'ordre et* μ_i *la hauteur de* x_i *par rapport à* $\mathfrak{p}$, *l'ordre de* x *est égal au plus grand des* ν_i *et sa hauteur au plus petit des* μ_i.

La première partie est immédiate, l'annulateur de x étant le p. p. c. m. des annulateurs des x_i. En second lieu, il est immédiat que la hauteur de x est *au plus égale* à $\min(\mu_i)$; soit d'autre part h un entier quelconque $\leq\min(\mu_i)$; par hypothèse, pour chaque i, il existe $z_i\in\mathrm{E}_i$ et $\alpha_i\in\mathrm{A}$, non divisible par $\mathfrak{p}$, tels que $\alpha_i x_i=\pi^h z_i$. On en déduit

$$\left(\alpha_1+\sum_{i\neq 1}\alpha_i\pi\right)x=\pi^h\left(z_1+\sum_{i\neq 1}\pi z_i\right)$$

et comme $\alpha_1+\sum_{i\neq 1}\alpha_i\pi$ n'est pas divisible par $\mathfrak{p}$, la hauteur de x est au moins égale à h, et par suite *au moins égale* à $\min(\mu_i)$.

9. Pour déterminer l'annulateur de $x\otimes y$, on peut supposer que l'un au moins des deux éléments x, y n'est pas libre, car dans le cas contraire, on sait (n° 5) que $x\otimes y$ est libre.

Nous commencerons par le cas où ni x ni y ne sont libres.

Théorème 4. — *Soient* E *et* F *deux modules sur un anneau de Dedekind* A, x *un élément lié de* E, y *un élément lié de* F. *Dans le produit tensoriel* $\mathrm{E}\otimes\mathrm{F}$, *l'ordre de* $x\otimes y$ *par rapport à un idéal premier* $\mathfrak{p}$, *est donné par la formule*

$$\max\big(\min(\nu-\mu',\nu'-\mu),0\big), \tag{10}$$

où ν, ν' *sont les ordres de* x *et* y *respectivement*, μ, μ' *les hauteurs de* x *et* y *respectivement, par rapport à* $\mathfrak{p}$.

Nous allons d'abord montrer qu'on peut se ramener au cas où chacun des modules E, F admet un système *fini* de générateurs.

Supposons en effet le théorème démontré dans ce cas. Il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ qui divisent, soit l'annulateur de x, soit l'annulateur de y. Pour chaque indice i, soient ν_i, ν'_i, μ_i, μ'_i les ordres et les hauteurs respectives de x et de y par rapport à $\mathfrak{p}_i$. Définissons une famille (u_i) d'éléments de E et une famille (v_i) d'éléments de F, de la manière suivante : si $\mu_i > \nu'_i$, on prend $u_i \in E$ tel qu'il existe $\beta_i \in A$ premier avec $\mathfrak{p}_i$ et satisfaisant à $\beta_i x = \pi_i^{\nu'_i} u_i$; si au contraire $\mu_i \leqq \nu'_i$, on prend $u_i \in E$ tel qu'il existe $\beta_i \in A$ premier avec $\mathfrak{p}_i$ et satisfaisant à $\beta_i x = \pi_i^{\mu_i} u_i$; on définit de même la famille des v_i en intervertissant les rôles de x et de y. Soit alors E_1 le sous-module de E engendré par x et les u_i (qui sont en nombre fini), F_1 le sous-module de F engendré par y et les v_i; pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$, l'expression (10) est *la même*, que l'on considère x et y comme éléments de E et F respectivement, ou comme éléments de E_1 et F_1 respectivement; en vertu de l'hypothèse, l'ordre de $x \otimes y$, où le produit tensoriel est pris *dans* $E_1 \otimes F_1$, est donné par l'expression (10) pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$; il s'ensuit que l'ordre de $x \otimes y$, où le produit tensoriel est pris *dans* $E \otimes F$, est *au plus égal* à l'expression (10), pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$.

D'autre part, soit λ un élément de A tel que $\lambda(x \otimes y) = 0$, le produit tensoriel étant pris dans $E \otimes F$. Alors, le raisonnement du théorème 3 montre qu'il existe un sous-module E_2 de E contenant x, un sous-module F_2 de F contenant y, tels que E_2 et F_2 aient chacun un système fini de générateurs, et que $\lambda(x \otimes y) = 0$ quand on prend le produit tensoriel *dans* $E_2 \otimes F_2$; on peut en outre supposer que E_2 contient E_1 et que F_2 contient F_1. Il en résulte que, pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$, l'expression (10) est la même, que l'on considère x et y comme éléments de E et F, ou comme éléments de E_2 et F_2; en vertu de l'hypothèse, la contribution de $\mathfrak{p}$ dans (λ) est donc *au moins égale* à l'expression (10) et comme l'annulateur de $x \otimes y$ est le p. g. c. d. des idéaux (λ), on voit que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, l'ordre de $x \otimes y$ par rapport à $\mathfrak{p}$ est au moins égal à l'expression (10), d'où l'on conclut, d'après ce qu'on a vu plus haut, qu'il lui est *égal*.

Considérons donc désormais le cas où E et F sont chacun engendré par un nombre *fini* d'éléments. On sait alors [8] que E (resp. F) est *somme directe* d'un nombre fini de sous-modules E_i (resp. F_j) dont chacun est, soit isomorphe à un idéal de A, soit isomorphe à un module quotient $A/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est une puissance d'un idéal premier. Soit x_i (resp. y_j) le composant de x (resp. y) dans E_i (resp. F_j); d'après les lemmes 2 et 6, l'ordre de $x \otimes y$ relatif à un idéal premier $\mathfrak{p}$ est le plus grand des ordres des éléments $x_i \otimes y_j$ relatifs à $\mathfrak{p}$. L'hypothèse que x et y sont liés entraine d'ailleurs que les seuls composants x_i (resp. y_j) non nuls sont relatifs à des E_i (resp. F_j) qui sont isomorphes à des modules quotients de A.

Or (lemme 1) le produit tensoriel $(A/\mathfrak{a}) \otimes (A/\mathfrak{b})$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de A, est isomorphe à $A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$; donc, si $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ sont deux idéaux premiers distincts, $(A/\mathfrak{p}^m) \otimes (A/\mathfrak{q}^n)$ est réduit à zéro, et $(A/\mathfrak{p}^m) \otimes (A/\mathfrak{p}^n)$ est isomorphe à

$A/\mathfrak{p}^{\min(n_i, n'_j)}$. Les seuls éléments $x_i \otimes y_j$ dont l'ordre par rapport à $\mathfrak{p}$ peut être $\neq 0$ sont donc ceux pour lesquels E_i et F_j sont isomorphes à des modules de la forme $A/\mathfrak{p}^n$.

D'autre part, l'élément π étant choisi comme dans le n° 8, on a $\mathfrak{p} = (\pi) + \mathfrak{p}^2$, d'où résulte aisément que tout élément z de $A/\mathfrak{p}^n$ est la classe modulo $\mathfrak{p}^n$ d'un élément de A de la forme $\alpha_0 + \alpha_1 \pi + \alpha_2 \pi^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \pi^{n-1}$, où les α_i sont premiers à $\mathfrak{p}$; si h est le plus petit indice tel que $\alpha_h \not\equiv 0$, l'ordre de z par rapport à $\mathfrak{p}$ est $n - h$, et sa hauteur par rapport à $\mathfrak{p}$ est h; pour tout autre idéal premier $\mathfrak{q}$, l'ordre de z par rapport à $\mathfrak{q}$ est zéro, et sa hauteur par rapport à $\mathfrak{q}$ est $+\infty$: ce dernier point provient de ce que, pour tout entier $k > 0$, tout élément α de A et tout élément ϱ de $\mathfrak{q}$, premier avec $\mathfrak{p}$ (lemme 1), il existe un $\gamma_k \in A$ tel que $\alpha \equiv \varrho^k \gamma_k \pmod{\mathfrak{p}^n}$.

Tenant compte de ces remarques, on voit, d'après le lemme 6, que, dans le calcul de l'ordre et de la hauteur de x (relatifs à $\mathfrak{p}$), on peut ne tenir compte que des composants x_i tels que E_i soit de la forme $A/\mathfrak{p}^n$; de même pour le calcul de l'ordre et de la hauteur de y. En d'autres termes, pour démontrer le théorème, on peut se ramener au cas où $E_i = A/\mathfrak{p}^{n_i}$, et $F_j = A/\mathfrak{p}^{n'_j}$. Soit alors m_i la hauteur de x_i, m'_j celle de y_j; l'ordre de x_i est donc $n_i - m_i$, l'ordre de y_j est $n'_j - m'_j$. Dans le produit tensoriel $(A/\mathfrak{p}^{n_i}) \otimes (A/\mathfrak{p}^{n'_j})$, il résulte du lemme 1 que l'ordre de $x_i \otimes y_j$ est égal à

$$\min(n_i, n'_j) - m_i - m'_j = \min(n_i - m_i - m'_j,\ n'_j - m'_j - m_i)$$

si ce nombre est > 0, et à zéro dans le cas contraire. D'après le lemme 6, l'ordre de $x \otimes y$ est donc égal à

$$\max\big(\min(n_i - m_i - m'_j,\ n'_j - m'_j - m_i),\ 0\big);$$

comme (en vertu du lemme 6) ν est égal au plus grand des $n_i - m_i$, ν' au plus grand des $n'_j - m'_j$, μ au plus petit des m_i, μ' au plus petit des m'_j, un raisonnement élémentaire montre que l'expression précédente de l'ordre de $x \otimes y$ coïncide bien avec l'expression (10).

10. Le calcul de l'annulateur de $x \otimes y$ est plus compliqué lorsque x est libre et y lié.

Théorème 5. — *Soient* E *et* F *deux modules sur un anneau de Dedekind* A, x *un élément libre de* E, y *un élément lié de* F. *Dans le produit tensoriel* $E \otimes F$, *l'ordre de* $x \otimes y$ *par rapport à un idéal premier* $\mathfrak{p}$, *est donné par la formule*

$$\max\big(\min(\nu' - \mu,\ \rho),\ 0\big), \tag{11}$$

où ν' *est l'ordre de* y *par rapport à* $\mathfrak{p}$, μ *la hauteur de* x *par rapport à* $\mathfrak{p}$, *et où le nombre* ρ *se calcule comme suit : pour chaque entier* $h \geq 0$, *on désigne par* $h + \theta_h$

la hauteur de $\pi'^h x$ dans E; μ' *désignant la hauteur de* y, ρ *est le plus petit des nombres*

$$\max(\nu' - 0_h,\ h - \mu') \tag{12}$$

lorsque h *prend toutes les valeurs entières* ≥ 0.

On a évidemment $0_0 = \mu$, et 0_h est fonction non décroissante de h; dans le cas où $0_h = 0_0 = \mu$ pour tout h, la formule (11) se réduit à $\max(\nu' - \mu, 0)$; c'est ce qui se passe lorsque E est un module *régulier*.

Pour démontrer le théorème, on commence par se ramener, comme dans le théorème 4, au cas où E et F sont chacun engendré par un nombre *fini* d'éléments; cela tient à ce que l'expression (11) ne peut être $\neq 0$ que pour les idéaux premiers en nombre fini, qui divisent l'annulateur de y, et que, d'autre part, pour chacun de ces idéaux, le calcul du nombre ρ ne fait intervenir qu'un nombre fini d'éléments de E; il en résulte qu'il y a un sous-module E_1 de E contenant x, un sous-module F_1 de F contenant y, tels que E_1 et F_1 n'aient chacun qu'un nombre fini de générateurs, et tels que, pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$, l'expression (11) soit la même, que l'on considère x et y comme éléments de E et F, ou comme éléments de E_1 et F_1; la fin du raisonnement est alors identique à celle du raisonnement analogue du théorème 4.

Supposons donc que E et F soient chacun engendré par un nombre fini d'éléments, et considérons d'abord le cas où E est *régulier*. Il est alors somme directe d'un nombre fini de sous-modules E_i, chaque E_i étant isomorphe à un idéal $\mathfrak{a}_i$ de A; F peut d'autre part (puisque y est lié) être supposé somme directe d'un nombre fini de modules F_j, isomorphes à des quotients de A par des puissances d'idéaux premiers. Soit x_i (resp. y_j) le composant de x (resp. y) dans E_i (resp. F_j); ici encore, l'ordre de $x \otimes y$ par rapport à $\mathfrak{p}$ sera le plus grand des ordres des $x_i \otimes y_j$.

Or, nous avons vu, au cours de la démonstration du théorème 2, que le produit tensoriel $\mathfrak{a} \otimes (A/\mathfrak{b})$ est isomorphe à $A/\mathfrak{b}$; les seuls éléments $x_i \otimes y_j$ dont l'ordre par rapport à $\mathfrak{p}$ peut être $\neq 0$ sont donc ceux pour lesquels F_j est isomorphe à un $A/\mathfrak{p}^n$. On peut donc se ramener au cas où $F_j = A/\mathfrak{p}^{n'_j}$ pour tout indice j; nous désignerons encore par m'_j la hauteur de y_j, de sorte que l'ordre de y_j est $n'_j - m'_j$; nous désignerons d'autre part par m_i la hauteur de x_i. Cela étant, d'après la forme des éléments des modules quotients $A/\mathfrak{p}^n$, et la démonstration du lemme 5, on voit aisément que l'ordre de $x_i \otimes y_j$ est égal à $\max(n'_j - m'_j - m_i, 0)$; on en déduit aussitôt que l'ordre de $x \otimes y$ est $\max(\nu' - \mu, 0)$ en vertu du lemme 6. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

Passons enfin au cas où E et F sont chacun engendré par un nombre fini d'éléments, mais où E n'est pas régulier. Alors E est somme directe d'un module régulier H (lui-même somme directe d'un nombre fini de sous-modules

isomorphes à des idéaux de A), et d'un module S, somme directe d'un nombre fini de modules isomorphes à des quotients de A par des puissances d'idéaux premiers. Posons $x = u + v$, où $u \in H$ et $v \in S$; l'ordre de $x \otimes y$ est égal au plus grand des ordres des deux éléments $u \otimes y$ et $v \otimes y$.

Soient q l'ordre de v, et r, s les hauteurs respectives de u et v; d'après ce qui précède, l'ordre de $u \otimes y$ est $\max(\nu' - r, 0)$; d'après le théorème 4, l'ordre de $v \otimes y$ est $\max[\min(q - \mu', \nu' - s), 0]$. Reste à voir que le plus grand de ces deux nombres est donné par la formule (11). Supposons d'abord $r \leq s$; alors le plus grand des deux nombres précédents est $\max(\nu' - r, 0)$; on a d'autre part $\mu = r$, et $\theta_h = \mu$ pour tout h, donc $\rho = \nu' - \mu$, et la formule (11) se réduit alors à $\max(\nu' - \mu, 0)$, qui concorde bien avec le résultat précédent. En second lieu, supposons $s < r$; l'ordre de $x \otimes y$ est égal à

$$\begin{array}{ll} \max(\nu' - r, 0) & \text{si } q - \mu' \leq \nu' - r, \\ \max(q - \mu', 0) & \text{si } \nu' - r < q - \mu' \leq \nu' - s, \\ \max(\nu' - s, 0) & \text{si } \nu' - s < q - \mu'. \end{array}$$

Or, on a alors $\theta_h = s$ pour $h < q$, et $\theta_h = r$ pour $h \geq q$; comme d'autre part $\mu = s$, on vérifie aisément dans les trois cas possibles la concordance de l'ordre de $x \otimes y$ que nous venons de trouver, avec l'ordre donné par la formule (11).

THÉORÈMES TAUBÉRIENS

ET

THÉORIE SPECTRALE

PAR M. ROGER GODEMENT.

INTRODUCTION.

Le but de cet article est de donner un exposé aussi simple que possible, valable pour tout groupe abélien localement compact, des résultats les plus récents de l'analyse harmonique; à savoir, des théorèmes taubériens de N. Wiener et, en partie, du théorème spectral de A. Beurling. Nous avons ajouté à ces deux questions quelques considérations sur les spectres des groupes d'opérateurs dans les espaces de Banach; les résultats obtenus dans cet ordre d'idées sont encore très incomplets, mais ils nous semblent de nature à éclairer quelque peu les résultats déjà connus (essentiellement le classique théorème de Stone, relatif aux espaces de Hilbert, et qui est au cas général ce que les fonctions de type positif sont aux fonctions continues bornées quelconques).

Les méthodes utilisées sont de type « moderne » : espaces de Banach, anneaux normés, etc.; nous rappelons au début l'essentiel de ces méthodes. Par ailleurs, nous faisons usage systématiquement des résultats et des notations du Mémoire [1] (dont le présent constitue la suite) de H. Cartan et R. Godement, *Théorie de la Dualité* (cité *Dualité*).

Propriétés des espaces de Banach [2]. — Soient E un espace de Banach complexe (c'est-à-dire : vectoriel, normé, *complet*) et E′ son dual (c'est-à-dire : l'espace

(1) *Cf.* Le présent tome des *Ann. Éc. Norm. Sup.*

(2) *Cf.* J. DIEUDONNÉ, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques* [*Ann. Éc. Norm. Sup.* (3). 59, p. 107-139].

des fonctionnelles linéaires continues définies sur E). Si $f \in E$ et si $f' \in E'$, on notera (f, f') la valeur en f de la fonctionnelle f'. On dira qu'un f' variable de E' *converge faiblement* vers f'_0 si, pour tout $f \in E$, (f, f') converge vers (f, f'_0).

LEMME *a*. — *Les* $f' \in E'$ *avec* $\|f'\| \leq 1$ *constituent un ensemble compact pour la topologie faible de* E'.

(Cet ensemble est la « boule unité » de E').

LEMME *b*. — *Soit* V *un sous-espace vectoriel de* E; *pour qu'un* f' *de* E' *soit faiblement adhérent à* V', *il faut et il suffit qu'il le soit à l'intersection de* V' *et d'une boule convenable de* E'; *en particulier, pour que* V' *soit faiblement fermé, il faut et il suffit que son intersection avec la boule unité de* E' *soit faiblement fermée.*

LEMME *c*. — *Soit* V' *un sous-espace vectoriel faiblement fermé de* E'; *soit* V *l'ensemble des* $f \in E$ *qui vérifient* $(f, f') = 0$ *pour tout* $f' \in V'$. *Alors pour qu'un* $f' \in E'$ *soit dans* V', *il faut et il suffit qu'il vérifie* $(f, f') = 0$ *pour tout* $f \in V$.

(V est la « variété orthogonale » à V').

Propriétés des anneaux normés (1). — Un système d'éléments $f, g \ldots$ constitue d'après Gelfand un anneau normé R si les conditions suivantes sont réalisées :

I. R est un anneau commutatif avec élément unité, et admet les nombres complexes comme opérateurs (2) (on notera $f \star g$ la multiplication dans R, et e l'unité).

II. R est muni d'une structure d'espace de Banach telle que la norme vérifie

$$\|f \star g\| \leq \|f\| . \|g\|.$$

Un sous-espace vectoriel I de R sera un *idéal* si, avec un $f \in R$, I contient les $f \star g$ (g arbitraire dans R). Si au surplus I est *fermé* dans R, on peut introduire de façon évidente une structure d'anneau normé dans l'espace quotient R/I. Un idéal sera *maximal* s'il n'est strictement contenu dans aucun autre idéal que R lui-même. Il est alors *fermé*, et on a le

LEMME *d*. — *Si* M *est un idéal maximal de* R, *alors l'anneau* R/M *est isomorphe au corps des nombres complexes et réciproquement.*

Si l'on note (f, M) l'image de f dans l'isomorphisme considéré, on voit que

$$(f + g, M) = (f, M) + (g, M); \tag{1}$$

$$(\lambda f, M) = \lambda (f, M); \tag{2}$$

$$(f \star g, M) = (f, M)(g, M); \tag{3}$$

$$|(f, M)| \leq \|f\|. \tag{4}$$

(1) I. GELFAND, *Normierte Ringe* (*Mat. Sbornik*, 9, 1941, p. 1-21).

(2) Il serait donc plus correct de parler d'*Algèbre sur le corps complexe*.

En outre, le nombre complexe (f, M) est caractérisé par le fait que l'élément

$$f-(f, \mathrm{M})e$$

de R est dans M; en particulier, les $f \in \mathrm{M}$ sont caractérisés par $(f, \mathrm{M}) = 0$.

On a d'autre part le

LEMME *e*. — *Tout idéal de* R *autre que* R *est contenu dans au moins un idéal maximal.* Si alors un $f \in \mathrm{R}$ vérifie $(f, \mathrm{M}) \neq 0$ pour tout idéal maximal M, c'est que l'idéal engendré par f est tout R; par suite, f admet un inverse dans R, d'où le

LEMME *f*. — *Pour qu'un* $f \in \mathrm{R}$ *possède un inverse dans* R, *il faut et il suffit que l'on ait* $(f, \mathrm{M}) \neq 0$ *pour tout idéal maximal* M; *on a alors*

$$(f^{-1}, \mathrm{M}) = \frac{1}{(f, \mathrm{M})}.$$

1. — THÉORÈMES TAUBÉRIENS DANS L^1.

Soit G un groupe abélien localement compact d'éléments $x, y, \ldots$ (on note e l'élément unité de G). Si l'on considère l'espace L^1 des fonctions $f(x)$ sommables sur G pour la mesure de Haar dx, espace muni de la norme habituelle

$$\|f\|_1 = \int |f(x)|\, dx,$$

et de la structure d'anneau commutatif définie par le « produit de composition »

$$f \star g(x) = \int f(xy^{-1}) g(y)\, dy,$$

on obtient un système possédant toutes les propriétés des anneaux normés, à ceci près que L^1 ne possède pas en général d'élément unité (la condition pour qu'il en existe un est que G soit discret). On ne peut donc appliquer directement à cet anneau les procédés de Gelfand; mais on va voir que le lemme *e* est valable aussi dans ce cas (1) : ce qui nous conduira précisément au célèbre théorème taubérien de N. Wiener.

LEMME I. — *Soit* $\mu(f)$ *une fonctionnelle linéaire bornée non nulle définie sur* L^1 *et vérifiant*

$$\mu(f \star g) = \mu(f)\mu(g);$$

alors il existe un élément bien déterminé $\hat{x}_\mu$ *du dual* $\hat{\mathrm{G}}$ *de* G *tel que*

$$\mu(f) = \hat{f}(\hat{x}_\mu).$$

Ce lemme établit la relation fondamentale entre les *caractères de* G et les *homomorphismes de* L^1 *dans le corps des nombres complexes.*

(1) A condition de se borner aux idéaux *fermés*.

Démonstration (¹). — Comme à toute fonctionnelle linéaire bornée sur L^1, on peut associer à μ une fonction $\varphi \in L^\infty$ (c'est-à-dire : mesurable et essentiellement bornée sur G) telle que

$$\mu(f) = \int f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Il s'agit de montrer que φ est un *caractère* de G. Pour cela, posons d'une manière générale

$$f_s(x) = f(s^{-1}x),$$

et observons qu'on a l'identité

$$f_s \star g = f \star g_s = (f \star g)_s \qquad (f, g \in L^1), \tag{2}$$

d'où résulte

$$\mu(f_s)\mu(g) = \mu(f)\mu(g_s). \tag{3}$$

Comme il existe une g telle que $\mu(g) \neq 0$, on déduit de là d'abord que

$$\mu(f) = 0 \quad \text{entraîne} \quad \mu(f_s) = 0 \quad \text{pour tout} \quad s \in G;$$

d'autre part, si $\mu(f)$ et $\mu(g)$ sont $\neq 0$, (3) s'écrit

$$\frac{\mu(f_s)}{\mu(f)} = \frac{\mu(g_s)}{\mu(g)} = \chi(s), \tag{4}$$

où $\chi(s)$ est une fonction bien déterminée; comme, d'après une propriété bien connue, l'application $s \to f_s$ de G dans L^1 est, pour chaque $f \in L^1$, continue, (4) montre que la fonction $\chi(s)$ est *continue* sur G; elle est en outre *bornée* d'après

$$\|f_s\|_1 = \|f\|_1;$$

enfin, on a

$$\chi(st) = \frac{\mu(f_{st})}{\mu(f)} = \frac{\mu(f_{st} \star f)}{\mu(f \star f)} = \frac{\mu(f_s \star f_t)}{\mu(f \star f)} = \chi(s)\chi(t),$$

χ est donc un *caractère* de G.

(4) s'écrit

$$\mu(f_s) = \chi(s)\mu(f), \tag{5}$$

et sous cette forme est valable pour *toute* f, puisque $\mu(f) = 0$ entraîne $\mu(f_s) = 0$. En comparant (5) et (1) on voit que

$$\int f(x)[\varphi(sx) - \chi(s)\varphi(x)]\,dx = 0 \quad \text{quels que soient } f \in L^1,\ s \in G;$$

cela signifie que les translatées de φ forment, dans L^∞, un sous-espace vectoriel V_φ de dimension un sur le corps complexe et que, de façon précise, on a, pour chaque $s \in G$,

$$\varphi(sx) = \chi(s)\varphi(x) \quad \text{presque partout en } x. \tag{6}$$

(¹) I. Gelfand et D. Raïkov, *On the theory of characters of commutative topological groups*. (*C. R. U. R. S. S.*, 28, 1940, p. 195-198) ont déjà donné le principe de cette démonstration.

V_φ étant de dimension finie est faiblement fermé dans L^∞; d'où résulte que, pour toute $f \in L^1$, on a

$$f \star \in V_\varphi;$$

mais alors la fonction *uniformément continue* $f \star \varphi$ est proportionnelle à φ (puisque V_φ est de dimension 1) : φ peut donc elle-même être supposée uniformément continue sur G, auquel cas (6) vaut *partout* et montre que

$$\varphi(s) = \chi(s)\varphi(e);$$

on voit immédiatement que $\varphi(e) = 1$ au moyen de $\mu(f \star g) = \mu(f)\,\mu(g)$.

C. Q. F. D.

Lemme II (1). — *Soient* $\hat{K}$ *une partie compacte de* $\hat{G}$, *et* $\hat{U}$ *un voisinage compact de* $\hat{K}$; *alors il existe une* $f \in L^1$ *vérifiant*

$$\hat{f}(\hat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{x} \in \hat{K}, \\ 0 & \text{si } \hat{x} \in \hat{G} - \hat{U}. \end{cases}$$

Démonstration (due à H. Cartan). — Soit $\hat{V} = \hat{V}^{-1}$ un voisinage de $\hat{e}$ pris assez petit pour que la réunion des

$$\hat{V}\,\hat{V}\,\hat{x} \qquad (\text{où } \hat{x} \text{ décrit } \hat{K})$$

soit contenue dans $\hat{U}$. Soient $\hat{K}'$ la réunion des $\hat{V}\hat{x}$ $(\hat{x} \in \hat{K})$, $\hat{g}$ et $\hat{h}$ les fonctions caractéristiques des sous-ensembles

$$\hat{K}' \quad \text{et} \quad \hat{V} \quad \text{de} \quad \hat{G}.$$

On a alors

$$\hat{g} \star \hat{h}(\hat{x}) = \int \hat{g}(\hat{x}\hat{y}^{-1})\,\hat{h}(\hat{y})\,d\hat{y} = \int_{\hat{V}} \hat{g}(\hat{x}\hat{y})\,d\hat{y}.$$

Si $\hat{x} \in \hat{K}$, les $\hat{x}\hat{y}$ où $\hat{y}$ décrit $\hat{V}$ restent dans K'; donc on a alors

$$\hat{g} \star \hat{h}(\hat{x}) = \text{mesure de } \hat{x}\,\hat{V} = \text{mesure de } \hat{V} = \text{const.}$$

Si par contre $\hat{x} \in \hat{G} - \hat{U}$, $\hat{x}\hat{V}$ ne rencontre pas $\hat{K}'$ et on a

$$\hat{g} \star \hat{h}(\hat{x}) = 0.$$

En posant

$$\hat{f}(\hat{x}) = \frac{1}{m(\hat{V})}\,\hat{g} \star \hat{h}(\hat{x}),$$

et en remarquant que $\hat{f}$, étant sommable sur $\hat{G}$ pour $d\hat{x}$ et combinaison linéaire de fonctions de type positif, est la transformée de Fourier d'une $f \in L^1$ (cf. *Dualité*, formule d'inversion de Fourier), on a la fonction cherchée.

---

(1) Ce lemme exprime que L^1 est une algèbre normée *régulière* au sens de G. Silov [*On regular normed rings* (*Travaux Inst. Stekloff*, XXI, 1947)].

Ceci étant, on va démontrer le

THÉORÈME (1) A. — *Soient $\hat{K}$ un sous-ensemble compact de $\hat{G}$, et f une fonction de L^1 dont la transformée de Fourier ne s'annule en aucun point de $\hat{K}$; alors il existe une $g \in L^1$ vérifiant*

$$\hat{g}(\hat{x}) = \frac{1}{\hat{f}(\hat{x})} \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{K}.$$

Démonstration. — Soit $I_{\hat{K}}$ l'ensemble des $h \in L^1$ tels que $\hat{h}(\hat{x}) = 0$ pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$; c'est un *idéal fermé* de L^1, et l'on peut considérer l'anneau quotient $R_{\hat{K}} = L^1/I_{\hat{K}}$; on désignera par $\dot{h}$ l'image d'un $h \in L^1$ dans l'application canonique de L^1 sur $R_{\hat{K}}$.

Si une $u_{\hat{K}}$ de L^1 vérifie

$$\hat{u}_{\hat{K}}(\hat{x}) = 1 \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{K},$$

on a

$$u_{\hat{K}} * h - h \in I_{\hat{K}} \qquad \text{pour toute } h \in L^1,$$

par suite, $R_{\hat{K}}$ possède un élément unité (2) qui n'est autre que $\dot{u}_{\hat{K}}$. On peut donc appliquer à $R_{\hat{K}}$ le lemme f.

Soit alors M un idéal maximal de $R_{\hat{K}}$; l'expression

$$\mu_M(h) = (\dot{h}, M)$$

est une fonctionnelle linéaire bornée et multiplicative sur L^1; d'après le lemme I, il existe donc un $\hat{x}_M \in \hat{G}$ tel que

$$\mu_M(h) = \hat{h}(\hat{x}_M),$$

et l'on aura

$$\mu_M(u_{\hat{K}}) = 1;$$

comme on peut s'arranger pour que $\hat{u}_{\hat{K}}$ soit nulle en dehors d'un voisinage arbitraire de $\hat{K}$ (lemme II), on a nécessairement $\hat{x} \in \hat{K}$. Le lemme f conduit alors immédiatement au résultat cherché.

COROLLAIRE 1 DU THÉORÈME A (3). — *Soient $\hat{K}$ un compact et $\hat{f}$ une combinaison linéaire de fonctions de type positif, telle que $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$ pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$; alors la fonction continue $\frac{1}{\hat{f}}$ coïncide sur $\hat{K}$ avec une combinaison linéaire de fonctions de type positif.*

---

(1) Ce résultat est classique dans la théorie de l'intégrale de Fourier, et tient essentiellement à la *régularité* de l'algèbre L^1.

(2) Autrement dit, l'idéal $I_{\hat{K}}$ *régulier* est au sens de I. E. Segal (*cf.* Appendice 2).

(3) Ce résultat est bien connu dans le cas des séries de Fourier (le fait que f soit combinaison linéaire de fonctions de type positif signifie que sa série de Fourier est absolument convergente).

COROLLAIRE 2 DU THÉORÈME A. — *Soient* $f, g \in L^1$ *et supposons que les zéros de* g *soient tous intérieurs à l'ensemble des zéros de* $\hat{f}$. *Alors, et si* $\hat{f}$ *est nulle en dehors d'un compact, on peut résoudre dans* L^1 *l'équation*

$$f = g \star h \qquad (h \in L^1).$$

Soient en effet $\hat{K}$ un *compact* tel que

$$\hat{g}(\hat{x}) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \hat{x} \in \hat{K};$$
$$\hat{f}(\hat{x}) = 0 \quad \text{pour} \quad \hat{x} \in \hat{G} - \hat{K}.$$

D'après le théorème A, il existe $g_1 \in L^1$ avec

$$\hat{g}(\hat{x})\,\hat{g}_1(\hat{x}) = 1 \qquad \text{pour} \quad \hat{x} \in \hat{K}.$$

Si alors on pose $h = f \star g$, on a

$$\hat{g}(\hat{x})\,\hat{h}(\hat{x}) = \hat{g}(\hat{x})\,\hat{g}_1(\hat{x})\,\hat{f}(x) = \begin{cases} \hat{f}(\hat{x}) & \text{si} \quad \hat{x} \in \hat{K}, \\ 0 & \text{si} \quad \hat{x} \in \hat{G} - \hat{K} \quad (\text{car } \hat{f}(\hat{x}) = 0) \end{cases}$$

et donc $\hat{g}\hat{h} = \hat{f}$, d'où $f = g \star h$ ce qui démontre la proposition. On va maintenant démontrer le

THÉORÈME TAUBÉRIEN. — *Soit* I *un idéal fermé de* L^1 ; *pour que* $I = L^1$, *il faut et il suffit que pour chaque* $\hat{x} \in \hat{G}$ *existe une* $\hat{f} \in I$ *avec* $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$.

Démonstration. — La nécessité de la condition est évidente; pour montrer qu'elle est suffisante, on va d'abord prouver que, si un idéal fermé I la vérifie, il contient toute $f \in L^1$ dont la transformée de Fourier est nulle en dehors d'un compact $\hat{K}$. Pour cela, et d'après le corollaire 2 du théorème A, il suffit de prouver l'existence d'une $g \in I$ telle que $\hat{g}(\hat{x}) \neq 0$ en tous les points d'un *voisinage* $\hat{U}$ de $\hat{K}$.

Or, si $\hat{U}$ est un tel voisinage, qu'on peut supposer compact, pour tout $\hat{x}_0 \in \hat{U}$ existe par hypothèse une $g \in I$ vérifiant

$$|\hat{g}(\hat{x}_0)| > 1$$

$\hat{g}$ étant *continue*, on aura encore $|\hat{g}(\hat{x})| > 1$ pour les $\hat{x}$ d'un voisinage $\hat{V}_0$ de $\hat{x}_0$. $\hat{U}$ étant *compact*, on peut alors le recouvrir au moyen d'un nombre fini de tels voisinages; d'où $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n \in \hat{U}$; $\hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_n$; et $g_1, \ldots, g_n \in I$ tels que

$$|\hat{g}_i(\hat{x})| > 1 \quad \text{pour} \quad \hat{x} \in \hat{V}_i \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{et} \quad U \subset \hat{V}_1 \cup \ldots \cup \hat{V}_n.$$

Alors si l'on pose

$$f = g_1 \star \tilde{g}_1 + \ldots + g_n \star \tilde{g}_n,$$

on a

$$f \in I$$

et

$$\hat{f}(\hat{x}) = \sum |\hat{g}_i(\hat{x})|^2 > 1 \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{U}.$$

Le théorème taubérien sera alors prouvé si l'on démontre le

LEMME III. — *Les $f \in L^1$ telles que $\hat{f}$ soit nulle en dehors d'un compact (variable) de $\hat{G}$ sont partout denses dans L^1.*

Or, soit f_α un filtre (1) sur L^1 tel que :

a. $\hat{f}_\alpha$ est nulle en dehors d'un compact « de plus en plus grand » de $\hat{G}$;

b. pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, $\hat{f}_\alpha(\hat{x})$ converge vers 1 suivant le filtre considéré ;

c. on a $f_\alpha(x) \geq 0$ pour tout $x \in G$.

d. $\int f_\alpha(x)\,dx = 1$.

(L'existence d'un tel filtre revient à la propriété suivante : sur tout groupe abélien, on peut approcher la constante 1 par des fonctions de type positif *nulles en dehors de compacts;* propriété démontrée dans l'article cité *Dualité*, § 18.)

Les hypothèses ci-dessus entraînent que la mesure $f_\alpha(x)\,dx$ converge « étroitement vers la masse un en e » ; c'est-à-dire que, pour toute fonction continue et bornée $F(x)$ sur G, on a

$$\lim_\alpha \int F(x) f_\alpha(x)\,dx = F(e);$$

soit alors $g(x)$ une fonction quelconque de L^1 ; on aura

$$\begin{aligned} \|g \star f_\alpha - g\|_1 &= \int dx \left| \int g(xy^{-1}) f_\alpha(y)\,dy - g(x) \right| \\ &= \int dx \left| \int [g(xy^{-1}) - g(x)] f_\alpha(y)\,dy \right| \\ &\leq \int f_\alpha(y)\,dy \int |g(xy^{-1}) - g(x)|\,dx \\ &= \int F(y) f_\alpha(y)\,dy, \end{aligned}$$

où F est donnée par

$$F(y) = \int |g(xy^{-1}) - g(x)\,dx = \|g_y - g\|_1;$$

(1) N. BOURBAKI, *Topologie générale* (Chap. I. Paris, 1940). Bien qu'un filtre ne puisse être correctement désigné par la notation « f_α », nous avons adopté cette dernière parce qu'elle évoque l'idée de « suite », plus généralement répandue.

d'après une propriété bien connue des fonotions sommables, F est continue, bornée et prend, pour $x = e$, la valeur zéro; il en résulte

$$\lim_{\alpha} \| g \star f_\alpha - g \|_1 = 0,$$

en sorte que g est limite, dans L^1, des fonctions $g \star f_\alpha$ dont les transformées de Fourier sont, comme celles des f_α, nulles en dehors de parties compactes de $\hat{G}$: ce qui démontre le lemme.

Remarque a. — Le théorème taubérien n'est autre que l'extension à l'anneau normé L^1, *dépourvu en général d'élément unité*, du lemme e valable *a priori* pour les seuls anneaux de Gelfand.

Remarque b. — Dans L^1, où l'on peut définir les « translations » par

$$f_s(x) = f(s^{-1}x),$$

il y a identité entre les notions d'*idéal fermé* et de *sous-espace vectoriel fermé invariant par translation* (1).

Soit V un tel sous-espace invariant; si $f \in V$, et si g est un élément arbitraire de L^1, $f \star g \in V$; en effet, rappelons que le dual de L^1 est isomorphe à l'espace L^∞, dont les éléments sont les fonctions $\varphi(x)$ « mesurables et essentiellement bornées » sur G, la dualité entre L^1 et L^∞ étant réalisée en posant

$$(f, \varphi) = \int f(x) \overline{\varphi(x)}\, dx;$$

soit alors φ un élément de L^∞ orthogonal à V : d'où en particulier

$$\int f(xy^{-1}) \overline{\varphi(x)}\, dx = 0 \qquad \text{pour tout } y \in G$$

et donc

$$\int g(y)\, dy \int f(xy^{-1}) \overline{\varphi(x)}\, dx$$
$$= \int \overline{\varphi(x)}\, dx \int f(xy^{-1})\, g(y)\, dy = \int \overline{\varphi(x)}\, f \star g(x) = 0;$$

tout élément de L^∞ orthogonal à V l'est donc à $f \star g$: comme V est fermé, il en résulte que $f \star g \in V$, et donc que V est un idéal comme annoncé. On verrait de même que tout idéal fermé est invariant par translation.

(1) On peut donc, comme le fait N. Wiener, parler de sous-espaces invariants par translations au lieu d'idéaux.

2. — Le spectre d'une fonction bornée et mesurable.

La combinaison des propriétés générales des espaces de Banach et du théorème taubérien va nous permettre maintenant de définir et d'étudier le « spectre » d'une fonction quelconque de L^∞. On va d'abord prouver le

Théorème B. — *Dans* L^∞, *toute variété linéaire* (1) *faiblement fermée* V', *non réduite à zéro et invariante par translation, contient au moins un caractère de* G.

Démonstration. — Soit V le sous-espace vectoriel de L^1 orthogonal à V'; il est fermé, et de plus *invariant par translation*, car $f \in V$ équivaut à

$$(f, \varphi) \equiv \int f(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx = 0 \qquad \text{pour tout } \varphi \in V';$$

V' étant invariant par translation, il en résulte

$$\int f(x)\,\overline{\varphi(sx)}\,dx \equiv \int f(s^{-1}x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx \equiv (f_s, \varphi) = 0,$$

et par suite $f_s \in V$.

V est donc un *idéal fermé* de L^1, idéal qui, si V' n'est pas réduit à zéro, est distinct de L^1; d'après le théorème taubérien, les transformées de Fourier des $f \in V$ ont au moins un zéro commun $\hat{x}_0$, ce qui s'écrit

$$\int f(x)\,\overline{(x, \hat{x}_0)}\,dx \equiv (f, \chi_0) = 0 \qquad \text{pour toute } f \in V,$$

où

$$\chi_0(x) = (x, \hat{x}_0);$$

il en résulte que l'élément χ_0 de L^∞ est orthogonal à V, et, d'après le lemme *c*, est contenu dans V' : d'où le théorème B.

V' étant comme plus haut un sous-espace vectoriel faiblement fermé et invariant par translation, on appellera *spectre de* V' l'ensemble $\sigma_{V'}$ des $\hat{x} \in \hat{G}$ tels que le caractère correspondant de G soit contenu dans V'; comme la topologie de $\hat{G}$ est précisément définie par la topologie faible de L^∞, et que V' est fermé pour cette topologie, on voit que *le spectre de* V' *est un sous-ensemble fermé de* $\hat{G}$; on peut encore le définir comme suit :

Considérons les $f \in L^1$ qui vérifient

$$f \star \varphi(x) = \int f(xy^{-1})\,\varphi(y)\,dy = 0 \qquad \text{pour toute } \varphi \in V';$$

(1) Dans cet article, nous employons cette expression dans le sens de *sous-espace vectoriel* (cette dernière terminologie serait du reste plus correcte).

en posant

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

l'équation précédente équivaut à

$$(\tilde{f}, \varphi_s) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire à} \qquad \tilde{f} \in V;$$

si donc $\hat{x}$ est dans le spectre de V', on a

$$\hat{\tilde{f}}(\hat{x}) = \int \tilde{f}(x)\,\overline{(x, \hat{x})}\,dx = \overline{\hat{f}(\hat{x})} = 0,$$

et réciproquement.

En d'autres termes, *$\hat{x}$ est dans le spectre de V' si et seulement si*

$$f \star \varphi(x) = 0 \qquad \textit{pour toute } \varphi \in V' \qquad \textit{entraîne} \qquad \hat{f}(\hat{x}) = 0.$$

Au théorème B, *théorème d'existence*, est associé un *théorème d'approximation*, qu'on obtiendra de la façon suivante :

σ étant un sous-ensemble *fermé* de $\hat{G}$, on notera V'_σ le plus petit sous-espace vectoriel faiblement fermé de L^∞ contenant les caractères de G définis par les éléments de σ; il est clair que V'_σ est l'ensemble des fonctions de L^∞ qui sont de la forme

$$a_1(x, \hat{x}_1) + a_2(x, \hat{x}_2) + \ldots + a_n(x, \hat{x}_n), \qquad \text{où} \quad \hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n \in \sigma$$

ou qui sont approchables faiblement par de tels « polynomes trigonométriques ». On notera aussi V_σ la variété orthogonale à V'_σ : c'est d'après le *lemme c*, l'ensemble des $f \in L^1$ qui vérifient

$$\int f(x)\,\overline{(x, \hat{x})}\,dx = 0 \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \sigma.$$

c'est-à-dire des $f \in L^1$ dont la transformée de Fourier s'annule sur σ. Il est clair aussi que V'_σ et V_σ sont invariantes par translation.

Ceci étant, on va démontrer le

Théorème C. — *Soit V' un sous-espace vectoriel faiblement fermé de L^∞, invariant par translation; pour tout voisinage fermé $\sigma \subset \hat{G}$ du spectre de V', on a*

$$V' \subset V'_\sigma.$$

Démonstration. — D'après le lemme *c*, il faut prouver que toute $\varphi \in V'$ est orthogonale à la variété V_σ de L^1; ou, d'après une remarque faite plus haut, que si $f \in L^1$ vérifie $\hat{f}(\hat{x}) = 0$ pour tout $\hat{x} \in \sigma$, on a $f \star \varphi = 0$ pour toute $\varphi \in V'$.

Or la fonction $\psi = f \star \varphi$ est dans V' (en raison de l'invariance de V'); son spectre (c'est-à-dire celui de la plus petite variété faiblement fermée contenant les ψ_s) est donc contenu dans celui de V', et est par suite *intérieur* à σ : soit

alors $\hat{x}_0$ un point du spectre de ψ; on peut trouver une $g \in L^1$ avec $\hat{g}(\hat{x}_0) \neq 0$ et $\hat{g}(\hat{x}) = 0$ en dehors d'un voisinage de $\hat{x}_0$ contenu dans σ; on a alors $f \star g = 0$, donc $g \star \psi = 0$, contrairement au fait que $\hat{g}$ n'est pas nulle au point $\hat{x}_0$ du spectre de ψ — à moins que l'on ait $\psi = 0$, ce qui démontre le théorème C.

Le théorème précédent conduit au problème suivant, que nous n'avons pu résoudre :

Problème I. — Soit V' une variété linéaire faiblement fermée de L^∞, invariante par translation; V' est-elle l'enveloppe linéaire faiblement fermée de son spectre ?

Il est clair que ce problème est équivalent au suivant :

Problème II. — Dans L^1, tout idéal fermé est-il l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent ?

Spectre d'une fonction de L^∞. — On a déjà introduit cette notion au cours de la démonstration précédente : le spectre de $\varphi(x)$ est celui de la plus petite variété linéaire invariante faiblement fermée qui contient $\varphi(x)$. Cette variété étant l'adhérence faible de l'ensemble des fonctions de la forme

$$\sum \alpha_i \varphi(s_i^{-1} x)$$

on peut poser la

Definition I. — *Un point* $\hat{x} \in \hat{G}$ *est dans le spectre de la fonction* $\varphi(x)$ *de* L^∞, *si toute fonction* $f(x)$ *de* L^1 *vérifiant* $f \star \varphi(x) = 0$ *vérifie* $\hat{f}(\hat{x}) = 0$.

Cas des fonctions continues. — Si la fonction $\varphi(x)$ est continue (et naturellement bornée), on peut remplacer la topologie faible par une autre.

Définition II. — *Une fonction continue bornée variable* $\varphi(x)$ *converge presque étroitement vers la fonction continue bornée* $\varphi_0(x)$ *si :*

a — $\varphi(x)$ *converge vers* $\varphi_0(x)$ *uniformément sur toute partie compacte de* G;

b — $\|\varphi\|_\infty$ *reste inférieur à un nombre fixe* $< +\infty$.

Observons que :

I. Si une φ variable de L^∞ converge *faiblement* vers une φ_0 tout en restant dans une boule fixe de L^∞, alors pour toute f de L^1, $f \star \varphi(x)$ converge vers $f \star \varphi_0(x)$ *uniformément sur toute partie compacte de* G, et reste uniformément bornée sur G.

II. Si $f \in L^1$ et si la fonction φ de L^∞ est continue, alors $f \star \varphi(x)$ est limite presque étroite de combinaisons linéaires de translatées de φ.

Ceci étant, et si le caractère $\chi(x)$ est dans le spectre de la fonction *continue* φ, on voit, en prenant une $f \in L^1$ telle que $f \star \chi(x) = \chi(x)$, que χ est limite presque étroite de fonctions $f \star \psi(x)$ (où ψ est une combinaison linéaire de translatéesde φ) et donc limite presque étroite de combinaisons linéaires de translatées de φ.

De même, si φ est limite *faible* de polynomes trigonométriques uniformément bornés, comme φ est limite presque étroite de fonctions de la forme $f \star \varphi(x)$, on voit que φ peut être approchée presque étroitement par des polynomes trigonométriques fabriqués avec les mêmes caractères que les précédents. D'où le

THÉORÈME D. — *Soit φ une fonction continue et bornée sur* G ; *parmi les fonctions qui sont limites presque étroites de combinaisons linéaires de translatées de φ, il existe au moins un caractère de* G ; *l'ensemble des caractères ainsi obtenus (spectre de φ) est un sous-ensemble fermé de* $\hat{G}$; *si l'on se donne arbitrairement un voisinage de ce spectre dans* $\hat{G}$, *alors on peut approcher φ, au sens de la convergence presque étroite, par des polynomes trigonométriques constitués au moyen des caractères de* G *situés dans ce voisinage.*

Remarque. — Les raisonnements utilisés pour démontrer le théorème D reposent sur la proposition suivante : tout élément du spectre de φ est limite de combinaisons linéaires de translatées de φ, *qui restent uniformément bornées*. Cette propriété est une conséquence du lemme *b*.

Fonctions dont le spectre est compact. — Une conséquence intéressante du théorème C est le

THÉORÈME E. — *Toute fonction mesurable et bornée dont le spectre est une partie compacte de* $\hat{G}$ *est presque partout égale à une fonction* UNIFORMÉMENT CONTINUE.

Démonstration. — Soient φ une fonction de L^∞ dont le spectre est un compact $\hat{K}$ de $\hat{G}$, et soit $\hat{U}$ un voisinage compact de $\hat{K}$; φ est limite faible de polynomes trigonométriques (1) de la forme

$$\psi(x) = a_0(x, \hat{x}_0) + \ldots + a_n(x, \hat{x}_n), \qquad \text{où } \hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_n \in \hat{U} ;$$

soit alors $f(x)$ une fonction de L^1 dont la transformée de Fourier est égale à 1 sur $\hat{U}$; on aura $f \star \psi(x) = \psi(x)$ et par suite $\psi(x)$ converge *uniformément sur tout compact* vers une fonction nécessairement égale presque partout à $\varphi(x)$, qui vérifie donc aussi $f \star \varphi(x) = \varphi(x)$: d'où la continuité uniforme de $\varphi(x)$.

Un cas particulier de ce théorème est le fait suivant, qui est à la base de la transformation de Fourier : tout caractère mesurable de G est presque partout

(1) Uniformément bornés d'après le lemme *b*.

égal à un caractère continu (car son spectre est réduit à un seul point). On démontre d'ailleurs cette propriété de la même façon que le théorème E.

On a vu que le spectre de φ possédait la propriété suivante : on peut approcher φ au moyen de polynomes trigonométriques construits avec des caractères de G aussi voisins qu'on le désire du spectre. On va voir que cette propriété est caractéristique du spectre ; d'une manière précise, on a le

THÉORÈME F. — *Le spectre d'une fonction φ de L^∞ est le plus petit ensemble fermé de $\hat{G}$ possédant la propriété suivante : étant donné un voisinage arbitraire de ce fermé, φ est limite faible de polynomes trigonométriques formés au moyen d'éléments de ce voisinage.*

Démonstration. — Soit tout d'abord σ un fermé tel que φ soit limite de polynomes de la forme

$$\sum a_i(x, \hat{x}_i), \qquad \text{où} \quad \hat{x}_i \in \sigma;$$

avec les notations du théorème C, on a donc $\varphi \in V'_\sigma$; V'_σ étant invariante, le spectre de φ est donc contenu dans V'_σ, c'est-à-dire dans le spectre de V'_σ ; mais celui-ci est précisément σ ; car si $\hat{x}_0$ n'est pas dans le *fermé* σ, il lui est *extérieur*, en sorte que l'on peut trouver une $f \in L^1$ avec

$$(a) \qquad \hat{f}(\hat{x}_0) \neq 0;$$

$$(b) \qquad \hat{f}(\hat{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \sigma,$$

donc f est orthogonale à V'_σ sans l'être à $(x, \hat{x})$, qui n'est donc pas contenu dans V'_σ.

Ceci étant, soit σ un fermé tel que φ soit limite de polynomes formés au moyen des éléments d'un voisinage arbitraire de σ ; ce qui précède prouve que tout voisinage fermé de σ contient le spectre de φ : donc σ lui-même contient le spectre de φ, d'où le théorème.

Addition des spectres. — Soient φ et ψ deux fonctions de L^∞, dont les spectres sont σ_φ et σ_ψ ; que peut-on dire du spectre de la fonction $\varphi + \psi$?

Tout d'abord, si $\hat{U}$ et $\hat{V}$ sont des voisinages de σ_φ et σ_ψ, φ et ψ sont limites respectivement de

$$\sum a_i(x, \hat{x}_i), \qquad \text{où} \quad \hat{x}_i \in \hat{U} \qquad \text{et} \qquad \sum b_j(x, \hat{y}_j), \qquad \text{où} \quad \hat{y}_j \in \hat{V},$$

en sorte que $\varphi + \psi$ est limite de

$$\sum c_k(x, \hat{z}_k), \qquad \text{où} \quad \hat{z}_k \in \hat{U} \cup \hat{V};$$

le théorème F montre alors que le spectre de $\varphi + \psi$ est contenu dans la réunion de ceux de φ et ψ.

On ne peut rien dire de plus précis sans hypothèses supplémentaires (par exemple si $\varphi = -\psi$, le spectre de $\varphi + \psi$ est vide). Mais dans le cas où les spectres de φ et ψ sont *disjoints*, on a $\sigma_{\varphi-\psi} = \sigma_\varphi \cup \sigma_\psi$. En effet, soit une $f \in L^1$ telle que

$$f \star (\varphi + \psi) = 0, \quad \text{d'où} \quad f \star \varphi = -f \star \psi = \theta;$$

la fonction θ est à la fois dans V'_φ et dans V'_ψ; son spectre est donc à la fois dans σ_φ et σ_ψ : par suite il est vide, et l'on a $f \star \varphi = f \star \psi = 0$; de là résulte que toute fonction de L^1 orthogonale à $V'_{\varphi+\psi}$ l'est à V'_φ et à V'_ψ : on a donc

$$V'_\varphi \subset V'_{\varphi+\psi} \quad \text{et} \quad V'_\psi \subset V'_{\varphi+\psi}, \quad \text{d'où} \quad \sigma_\varphi \cap \sigma_\psi \subset \sigma_{\varphi-\psi},$$

et finalement $\sigma_{\varphi-\psi} = \sigma_\varphi \cup \sigma_\psi$ comme annoncé. D'où le

THÉORÈME G. — *Le spectre de la somme de deux fonctions de L^* est contenu dans la réunion des spectres de ces deux fonctions; si en outre les spectres de celles-ci sont disjoints, alors le spectre de la somme est exactement la réunion des deux premiers.*

Spectre d'une limite faible. — Soit φ un élément variable de L^*, qui converge faiblement vers une limite φ_0; supposons en outre que le spectre de φ reste contenu dans un fermé fixe σ. Alors il est clair que le spectre de φ_0 est lui-même contenu dans σ : c'est une conséquence immédiate du théorème F. On se servira plus loin de cette propriété.

Spectre d'un produit de composition. — Étant donné une $f \in L^1$, on notera σ_f le plus petit sous-ensemble *fermé* de $\hat{G}$ à l'extérieur duquel on a $\hat{f}(\hat{x}) = 0$. Il est clair que si, en outre, $f \in L^*$, σ_f n'est autre que le spectre de f au sens de la définition I.

Si $f \in L^1$ et $\varphi \in L^*$, il est alors immédiat de constater que

$$\sigma_{f\star\varphi} \subset \sigma_f \cap \sigma_\varphi;$$

de plus, tout point de σ_φ qui est *intérieur* à σ_f est dans $\sigma_{f\star\varphi}$. On observera qu'on n'a pas toujours $\sigma_{f\star\varphi} = \sigma_f \cap \sigma_\varphi$ [contre-exemple : $\varphi(x) = (x, \hat{x}_0)$ où $\hat{x}_0$ est un point *frontière* de σ_f; on a alors $\sigma_f \cap \sigma_\varphi = \{\hat{x}_0\}$, et $f \star \varphi = 0$ en sorte que $\sigma_{f\star\varphi}$ est vide].

3. — Variétés spectrales des représentations linéaires de G. (1).

Représentations linéaires bornées de G. — Soit E un espace de Banach arbitraire [on notera X, Y, ... ses éléments, $\|X\|$ la norme, (X, X') la fonction

(1) Dans le cas où G est le groupe additif des nombres réels, on a des résultats beaucoup plus précis : toute représentation bornée U_t est engendrée par une transformation infinitésimale, suivant $U_t = e^{tA}$ (résultat dû à I. Gelfand dans le cas d'un espace de Banach quelconque

réalisant la dualité entre E et son dual E′]. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $U_x (x \in G)$ définis dans E sera une représentation linéaire bornée de G dans F si

a. $U_{xy} = U_x U_y$, $U_{x^{-1}} = U_x^{-1}$;

b. pour chaque $X \in E$, on a $\| U_x X \| = \| X \|$;

c. quels que soient $X \in E$ et $X' \in E'$, la fonction $(U_x X, X')$ est continue sur G.

Definition III. — *Étant donné un sous-ensemble fermé* σ *de* $\hat{G}$, *on appelle variété spectrale de* E *associée à* σ *l'ensemble* M_σ *des* $X \in E$ *qui possèdent la propriété suivante : pour tout* $X' \in E'$, *le spectre de la fonction* $(U_x X, X')$ *est contenu dans* σ.

Remarque. — D'après les hypothèses (*b*) et (*c*), les fonctions $(U_x X, X')$ sont bornées et continues.

Théorème H. — *Pour tout ensemble fermé* $\sigma \subset \hat{G}$, M_σ *est un sous-espace vectoriel fermé de* E, *invariant par les opérateurs* U_x.

Démonstration. — Que M_σ soit un sous-espace vectoriel de E résulte immédiatement du théorème G; M_σ est fermé pour la raison suivante : si un X variable converge au sens de la norme de E vers un X_0, pour chaque X' de E′, la fonction $(U_x X, X')$ converge, d'après l'hypothèse (*b*), *uniformément sur* G (donc *a fortiori* faiblement dans L^∞) vers $(U_x X_0, X')$; si alors X reste dans M_σ, on a aussi $X_0 \in M_\sigma$ (d'après la remarque terminant le paragraphe 2). Enfin, on a, si $\varphi(x) = (U_x X, X')$,

$$(U_x U_s X, X') = (U_{sx} X, X') = \varphi(sx),$$

en sorte que M_σ est invariante par les U_s.

Les propriétés algébriques des spectres, bien connues dans le cas classique où $G = N$ (groupe additif des entiers) et où E est l'espace de Hilbert, cas qui correspond à la décomposition spectrale des opérateurs unitaires, s'étendent en partie au cas général :

Théorème I*a*. — *La variété spectrale de* E *associée à l'intersection d'une famille quelconque de fermés est l'intersection des variétés spectrales associées à ces fermés.*

Il est superflu d'insister sur la démonstration, évidente de ce théorème.

Théorème I*b*. — *La variété spectrale associée à la réunion d'un nombre fini de compacts disjoints est la somme directe des variétés associées à ces compacts.*

Démonstration. — On peut se borner à examiner le cas de *deux* compacts σ_1 et σ_2 sans point commun. Tout d'abord, les variétés M_{σ_1} et M_{σ_2} n'ont en commun que zéro; car si X est dans ces deux variétés, pour tout $X' \in E'$ le spectre de la

fonction $(U_x X, X')$ est à la fois dans σ_1 et σ_2 : il est donc vide, d'où $(U_x X, X') = 0$ et $X = 0$.

Soient $\hat{U}_1$ et $\hat{U}_2$ des voisinages compacts disjoints de σ_1 et σ_2. On peut trouver une f_1 et une f_2 de L^1 vérifiant

$$\hat{f}_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{x} \in \hat{U}_1, \\ 0 & \text{si } \hat{x} \in \hat{U}_2; \end{cases}$$

$$\hat{f}_2(\hat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{x} \in \hat{U}_2, \\ 0 & \text{si } \hat{x} \in \hat{U}_1. \end{cases}$$

Considérons dans E les opérateurs définis symboliquement par

$$T_1 = \int U_x f_1(x)\, dx, \qquad T_2 = \int U_x f_2(x)\, dx,$$

et soit X un point de $M_{\sigma_1 \cup \sigma_2}$; alors, on a immédiatement,

$$T_1 X \in M_{\sigma_1}, \qquad T_2 X \in M_{\sigma_2}$$

et

$$X = T_1 X + T_2 X,$$

d'où résulte que

$$M_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \subset M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2};$$

inversement, si $X_1 \in M_{\sigma_1}$ et si $X_2 \in M_{\sigma_2}$, pour tout $X' \in E'$ le spectre de la fonction

$$(U_x X, X') = (U_x X_1, X') + (U_x X_2, X') \qquad (X = X_1 + X_2)$$

est contenu dans $\sigma_1 \cup \sigma_2$ (th. G), d'où

$$X_1 + X_2 \in M_{\sigma_1 \cup \sigma_2}$$

et l'on a finalement $M_{\sigma_1 \cup \sigma_2} = M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2}$ comme annoncé.

Remarque. — On a utilisé les « opérateurs de composition »

$$T_f = \int U_x f(x)\, dx \qquad (f \in L^1);$$

plus généralement, on peut définir

$$T_\mu = \int U_x\, d\mu(x)$$

de la façon suivante, pour toute mesure μ *bornée*.

Supposons d'abord μ portée par un *compact* K de G, et de plus *positive* et de *masse totale égale à un* : l'ensemble de ces mesures constitue (avec la topologie « vague ») un espace *compact* Ω_K ; d'autre part, pour un $X \in E$, désignons par E(X, K) l'ensemble des $U_x X$ où x décrit K, et par C(X, K) l'*enveloppe fermée convexe* de E(X, K) dans E.

L'application $x \to U_x X$ de K dans E muni de la topologie *faible* étant, d'après la condition (c) sur les U_x, *continue*, on voit que $E(X, K)$ et par suite $C(X, K)$ sont *faiblement compacts* et donc *faiblement complets*.

D'autre part, associons à toute mesure *discrète* $\mu \in \Omega_K$, formée des masses ponctuelles $a_i (a_i \geq 0,\ a_0 + \ldots + a_n = 1)$ placées aux points $x_i \in K$, le point

$$X_\mu = a_0 U_{x_0} X + \ldots + a_n U_{x_n} X \qquad \text{de } C(X, K);$$

pour tout $X' \in E'$, on a trivialement

$$(X_\mu, X') = \int (U_x X, X')\, d\mu(x),$$

en sorte que, si μ converge vaguement vers μ_0, le premier membre tend vers une limite : donc X_μ converge faiblement vers un élément bien déterminé X_{μ_0} de $C(X, K)$ qui, par définition, représente $\int U_x X\, d\mu_0(x)$.

T_μ étant défini dans le cas où μ vérifie les conditions précédentes, il n'y a évidemment aucune difficulté à passer au cas général.

Remarque b. — Il est probable qu'il existe une proposition plus générale que le théorème 1*b*, ce n'est toutefois pas évident; en particulier, peut-on affirmer que la variété associée à la somme de deux fermés quelconques soit la somme des variétés correspondantes ? (c'est-à-dire soit la plus petite variété linéaire fermée contenant les deux variétés en question). On peut en tout cas affirmer que l'on a $M_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \supset M_{\sigma_1} + M_{\sigma_2}$ (mais c'est trivial).

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ce point, d'autant plus que, jusqu'ici, l'*existence de variétés spectrales non triviales* n'est pas prouvée.

Hypothèse A. — Toute fonction de L^∞ dont le spectre est réduit à un seul point $\hat{x}_0$ est de la forme $k(x, \hat{x}_0)$.

Théorème 1. — *Si l'hypothèse* A *est vraie, ou bien il existe des variétés spectrales distinctes de zéro et de* E, *ou bien* U_x *a la forme triviale*

$$U_x X = (x, \hat{x}_0) X,$$

où $\hat{x}_0$ *est un élément de* $\hat{G}$.

Démonstration. — Supposons que M_σ soit constamment réduit à zéro ou à E, et soit σ_0 le plus petit fermé pour lequel on ait $M_{\sigma_0} = E$ (définition justifiée par le théorème 1*a*). Je dis que σ_0 se réduit à un seul point. En effet, σ_0 n'est pas vide, sinon on aurait $(U_x X, X') = 0$ et donc $U_x X = 0$ pour tout $X \in E$. Si d'autre part σ_0 contenait deux points distincts $\hat{x}_0$ et $\hat{x}_1$, pour toute $f \in L^1$, on pourrait faire $f = f_0 + f_1$ où $\hat{f}_0$ est nulle dans un *voisinage* de $\hat{x}_1$ et où $\hat{f}_1$ est nulle dans un *voisinage* de $\hat{x}_0$; $T_{f_0} X$ appartient donc à une M_σ où σ ne contient

pas $\hat{x}_1$, donc ne contient pas τ_0 : par suite $T_{f_0}X = 0$; de même, $T_{f_1}X = 0$ et en définitive $T_fX = 0$ pour toute $f \in L^1$ et tout $X \in E$, ce qui ramène au cas $U_x = 0$.

Le fermé τ_0 se réduit donc à un seul point $\hat{x}_0$; de l'hypothèse A on déduit alors que

$$(U_x X, X') = (x, \hat{x}_0)(X, X'),$$

d'où le théorème J.

L'hypothèse A est un cas particulier du problème I énoncé au paragraphe précédent; on peut y répondre par l'affirmative dans le cas où $G = R^n$ (prouvé par Beurling pour $n = 1$, cas d'où l'on déduit facilement le cas général) et aussi dans le cas où G est compact (cela résulte alors de la théorie des fonctions presque périodiques).

Appendice 1. — Afin de préciser les rapports existants entre les résultats de A. Beurling (1) et ceux du paragraphe 2, rappelons que cet auteur parvient aux résultats suivants : disons qu'une fonction continue et bornée variable $\varphi \in L^\infty$ converge *étroitement* vers une fonction φ_0 (continue et bornée) si $\varphi(x)$ converge vers $\varphi_0(x)$ uniformément sur tout compact et si, en outre, $\|\varphi\|_\infty$ converge vers $\|\varphi_0\|_\infty$ (condition plus forte que la condition : $\sup \|\varphi\|_\infty < +\infty$); ceci étant, A. Beurling a prouvé les deux propriétés suivantes (pour $G = R^1$) :

1° Si une $\varphi \in L^\infty$ est *uniformément continue* sur G, il existe, parmi les limites *étroites* de combinaïsons linéaires de translatées de φ, au moins un caractère de G;

2° En outre, si le spectre de φ contient *un seul* caractère $\hat{x}_0$, φ est proportionnelle à ce caractère (*cf.* l'Hypothèse A du § 3).

Dans le cas d'un groupe abélien quelconque, il est possible de montrer que, si $\varphi \in L_\infty$ est uniformément continue, il existe, parmi les limites étroites de combinaisons linéaires de translatées de φ, au moins une fonction *dont le spectre est réduit à un seul point* (qui peut être du reste choisi arbitrairement dans τ_φ). Une généralisation complète du théorème de Beurling se ramène donc essentiellement (ce que nous n'avons pu faire) à une démonstration de l'Hypothèse A. En termes algébriques, le résultat principal de Beurling peut donc s'énoncer comme suit : dans l'algèbre normée L^1, un idéal fermé ne peut être *primaire* sans être déjà *maximal*.

Appendice 2. — On trouvera la plupart des résultats du paragraphe 1 exposés, par une méthode plus systématiquement algébrique que la nôtre, mais au fond équivalente, dans le mémoire suivant : I. E. Segal, The group algebra of a locally

(1) A. Beurling, *Un théorème sur les fonctions uniformément continues et uniformément bornées sur l'axe réel* (*Acta Math.*, 77, 1945).

compact group (*Trans. Am. Math. Soc.*, 61, 1947, pp. 69-105). Signalons en passant que l'un des problèmes soulevés par les résultats de Segal dans le cas d'un groupe non abélien (à savoir : un idéal à gauche maximal fermé de l'algèbre L^1 est-il associé à une représentation *unitaire* irréductible du groupe?) dépend essentiellement du suivant : un sous-espace vectoriel faiblement fermé de L^∞, non nul et invariant par les translations à gauche de G, contient-il nécessairement une fonction *de type positif* non nulle? On peut voir facilement que ce dernier problème revient, à peu près, à une extension, analogue à celle du paragraphe 2, du théorème de Beurling à un groupe non abélien; mais il n'est bien entendu pas certain qu'une telle extension soit toujours possible. On trouvera dans une Note récente de D. A. Raïkov (¹) une condition algébrique remarquablement simple pour que ce problème admette une réponse affirmative : c'est que, dans l'algèbre obtenue en adjoignant à L^1 un élément unité ε, tout élément de la forme $f \star \tilde{f} + \varepsilon$ soit inversible (condition évidemment vérifiée par les groupes abéliens).

(¹) D. A. Raïkov, *To the theory of normed rings with an involution* [*C. R. U. R. S. S.* (Doklady), t. 54, 1946, p. 387-390].

SUR

LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES ZÉROS

DE

CERTAINES FONCTIONS D'APPROXIMATION

PAR M. SHAFIK DOSS.

INTRODUCTION.

Soient les fonctions $f_n(z)$, holomorphes dans la région R et convergeant uniformément dans R vers la fonction $f(z)$, nécessairement continue dans R et holomorphe à l'intérieur de R.

D'après un théorème de Hurwitz (1), *si $f(z)$ est différent de zéro sur la frontière de* R, *le nombre des zéros de $f_n(z)$ qui sont intérieurs à* R *est pour n suffisamment grand, exactement égal au nombre des zéros de $f(z)$ intérieurs à* R ; les zéros étant comptés avec leurs ordres de multiplicité.

En particulier, *si $f(z)$ a, au point ζ intérieur à* R, *un zéro d'ordre de multiplicité $k \geq 1$*, pour *n* assez grand, *$f_n(z)$ aura, dans tout voisinage de ζ* qui ne contient aucun zéro de $f(z)$ différent de ζ, *exactement k zéros. Si l'on ordonne les zéros $\zeta_{ni}(i = 1, 2, \ldots)$ de $f_n(z)$ suivant les valeurs croissantes de $|\zeta_{ni} - \zeta|$, les k zéros $\zeta_{ni}(1 \leq i \leq k)$ tendront vers ζ quand n croît indéfiniment.*

L'objet du présent travail est l'étude du comportement asymptotique de $\zeta_{ni} - \zeta$ pour quelques classes de fonctions $f(z)$ et quelques classes de fonctions d'approximation associées, $f_n(z)$. Les notations ci-dessus seront conservées dans la suite.

(1) A. HURWITZ, *Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function* (*Math. Annalen*, 33, 1889, p. 246 et suiv.).

Les premiers résultats sur ce sujet paraissent avoir été obtenus en 1930 par M. Fekete, dans ses leçons de l'Université Hébraïque de Jérusalem (¹). Il nous communiqua quelques-uns de ses résultats en juillet 1943 et nous proposa l'étude de cette question.

$f(z)$ désignera dans les Chapitres I, II, III et V la série entière $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$. Les formules (1), (3), (4 *a*), (4 *b*), (5) et (6) sont dues à M. Fekete. Elles sont inédites et nous furent communiquées sans démonstrations.

Voici un résumé du présent travail :

Dans le Chapitre I, nous considérons une série entière $f(z)$ dont le rayon de convergence est $\rho\ (0 < \rho < \infty)$ et ses sommes partielles $f_n(z)$. Nous démontrons la formule suivante :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \zeta_{ni} - \zeta \right|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho} \qquad (1 \leq i \leq k). \tag{1}$$

Nous examinons ensuite *le cas où* ρ *est infini;* et la série entière représente une fonction entière d'ordre fini r et nous complétons le résultat (1) par le suivant :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \zeta_{ni} - \zeta \right|^{\frac{k}{n \log n}} = e^{-\frac{1}{r}} \qquad (1 \leq i \leq k) \quad (^2). \tag{2}$$

Dans le Chapitre II, nous considérons une série entière dont le rayon de convergence est $\rho\ (0 < \rho \leq \infty)$ et les *Moyennes de Cesàro* $f_n^{[r]}(z)$ d'ordre entier $r \geq 1$ qui lui sont associées. Nous démontrons le résultat suivant :

Si $r \geq k$, on a

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right) = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq k), \tag{3}$$

où α_i désigne l'un des zéros [tous réels et positifs (³) et ordonnés suivant leurs modules croissants] du polynome

$$L_{rk}(z) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{r}{s} s!\, z^{k-s}.$$

(¹) Il avait déjà obtenu, en 1913, dans certains cas particuliers, des résultats d'un caractère topologique pour la distribution des ζ_{ni} dans le voisinage de ζ. *Cf. C. R. Ac. Sc.*, t. 157, octobre 1913 et t. 158, mai 1914.

(²) On observera que les formules (1) et (2) donnent *théoriquement* un moyen d'évaluer le rayon de convergence d'une série entière ou l'ordre d'une fonction entière.

(³) Ces propriétés des α_i ont permis à M. Fekete de compléter un résultat obtenu antérieurement dans le cas où ζ et les a_ν sont réels, *voir* la *Remarque* à la fin du Chapitre II.

Si $1 \leq r \leq k-1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right)=0 \qquad (1\leq i\leq k-r), \tag{4a}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_{n,k-r+j}}\right)=\alpha_j \qquad (1\leq j\leq r), \tag{4b}$$

où α_j désigne le $j^{\text{ième}}$ zéro du polynome

$$L_{kr}(z)=\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{k}{s}s!\,z^{r-s}.$$

Le premier groupe de zéros [qui vérifie (4 *a*)] satisfait à la loi plus précise

$$\lim_{n\to\infty}|\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{k-r}{n}}=\frac{|\zeta|}{\rho} \qquad (1\leq i\leq k-r), \tag{5}$$

qui peut être considérée comme une généralisation de (1).

Nous avons de plus déduit des résultats de M. Fekete le *degré d'approximation par les Moyennes de Cesàro en un point intérieur au cercle de convergence*.

Dans le Chapitre III, nous considérons les *polynomes de Jensen*

$$j_n(f)=a_0+a_1z+a_2z^2\left(1-\frac{1}{n}\right)+a_3z^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$
$$+a_nz^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

associés par M. Fekete (1) à la série entière $f(z)$ dont le rayon de convergence est positif et nous démontrons le résultat suivant :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\zeta_{ni}}{\zeta}-1\right)=\alpha_i \qquad (1\leq i\leq k), \tag{6}$$

où α_i désigne le $i^{\text{ième}}$ zéro du polynome d'Hermite de degré k (2).

Dans le Chapitre IV, nous associons, suivant un procédé de M. Fekete, à toute suite $\varphi_n(z)$ de fonctions holomorphes convergeant uniformément vers $\varphi(z)$ dans un domaine $(\mathcal{D})$, une autre suite $\varphi_{nn}^{[r]}(z)$ que nous appellerons *suite de Fekete* d'ordre $r\geq 1$.

La relation entre $\varphi_{nn}^{[r]}(z)$ et $\varphi_n(z)$ est la même que la relation

$$f_n^{[r]}(z)=(-1)^r\frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r}r!}\frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{f_n(z)}{z^{n+1}}\right\}$$

(1) M. Fekete, *C. R. Acad. Sc.*, t. 158, p. 1256; Jensen, *Acta Math.*, t. 36, p. 184.

(2) M. Fekete a pu, grâce à sa formule (6), compléter un résultat obtenu antérieurement dans le cas où ζ et les a_ν sont réels; voir la *Remarque* à la fin du Chapitre III.

qui lie les moyennes de Cesàro $f_n^{[r]}(z)(r \geq 1)$ aux sòmmes partielles $f_n(z)$ d'une série entière $f(z)$.

Les $\varphi_{nn}^{[r]}(z)$ tendent uniformément vers $\varphi(z)$ dans $(\mathcal{D})$. Nous démontrons que si le degré d'approximation de $\varphi_n(z)$ vers $\varphi(z)$ est $o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, les lois asymptotiques (3), (4 *a*) et (4 *b*) restent vraies pour les suites de Fekete associées à la suite $\varphi_n(z)$.

Dans le Chapitre V, nous considérons les *Moyennes de Hölder* $h_n^{(r)}$ d'ordre entier $r \geq 2$, associées à une série entière $f(z)$ dont le rayon de convergence est positif.

Ici, on doit distinguer entre les zéros simples et les zéros multiples de $f(z)$. Pour un zéro simple $\zeta \neq 0$, le zéro ζ_n de $h_n^{(r)}$ satisfait à la loi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(r-1)!\, n}{(\log n)^{r-1}} \left(\frac{\zeta_n}{\zeta} - 1 \right) = 1.$$

Pour un zéro $\zeta \neq 0$, d'ordre de multiplicité $k \geq 2$, on a la loi

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{(r-2)!\, n}{(k-2)!\, (\log n)^{r-2}} \right\}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{\zeta_{ni}}{\zeta} - 1 \right) = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq k),$$

où α_i désigne l'un des zéros du binome

$$z^k \varphi(\zeta) + (-1)^k \frac{1}{\zeta^{k-1}} {}^{(k-1)}\varphi(\zeta),$$

avec

$$f(z) = (z-\zeta)^k \varphi(z) = (z-\zeta)^k {}^{(0)}\varphi(z),$$

$${}^{s}\varphi(z) = \int_0^z {}^{(s-1)}\varphi(t)\, dt \qquad (s \geq 1).$$

Les zéros α_i étant ordonnés suivant les valeurs croissantes de leurs arguments, les ζ_{ni} seront ordonnés suivant les valeurs croissantes de $\arg \frac{\zeta_{ni} - \zeta}{\zeta}$ $(1 \leq i \leq k)$, (à l'exception possible de ζ_{n1} quand $\alpha_1 > 0$).

Nous avons obtenu, à la fin de ce Chapitre, le *degré d'approximation par les Moyennes de Hölder en un point intérieur au cercle de convergence de* $f(z)$.

Dans le Chapitre VI, nous considérons *une classe de polynomes* $f_n(z)$ *convergeant maximalement*, au sens de Walsh (1), *vers la fonction* $f(z)$, holomorphe dans l'ensemble fermé et borné C dont le complémentaire est connexe et régulier (2).

---

(1) J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by rational functions in the complex domain*; New-York, 1935, p. 80.

(2) Walsh, *loc. cit.* p. 65 et suiv.

Désignant par $w = \varphi(z)$ la fonction qui représente conformément le complémentaire de C sur l'extérieur du cercle $|w| \leq 1$; par C_R la courbe $|\varphi(z)| = R > 1$; par ρ, la borne supérieure, nécessairement > 1, des valeurs de R pour lesquelles $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C_R, nous démontrons la loi asymptotique

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni} - \zeta_n|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\varphi(\zeta)|}{\rho} \qquad (1 \leq i \leq k),$$

où ζ, intérieur à C_ρ, n'appartient pas à C.

Enfin, dans le Chapitre VII et dernier, nous étudions un problème inverse. Étant donnée la loi asymptotique à laquelle obéissent les ζ_{ni}, en déduire des renseignements sur l'ordre d'approximation de $f(z)$ par $f_n(z)$.

C'est pour moi un agréable devoir d'exprimer ici ma reconnaissance à M. Fekete, Recteur de l'Université Hébraïque de Jérusalem, qui m'a indiqué le sujet de ce mémoire et a bien voulu diriger mon travail.

CHAPITRE I.

Sur le comportement asymptotique des zéros des sommes partielles d'une série entière.

Soit

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

une série entière dont le rayon de convergence est $\rho (0 < \rho < \infty)$ et $\zeta \neq 0$, un zéro de $f(z)$ d'ordre de multiplicité k, intérieur au cercle de convergence.

Désignons par ζ_{ni} les zéros de

$$f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu.$$

Nous nous proposons d'établir la formule

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho} \qquad (1 \leq i \leq k).$$

Posons

$$\varphi^{s-1}(z) = (z - \zeta)\varphi^s(z) \qquad (1 \leq s \leq k)$$

avec

$$\varphi^0(z) = f(z),$$

$$\varphi^s(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu^{(s)} z^\nu \qquad (1 \leq s \leq k).$$

Posons aussi

$$\varphi_n^{(s)}(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\beta_\nu^{(s)}z^\nu \qquad (1\leq s\leq k).$$

Les séries $\varphi^{(s)}(z)$ ont un rayon de convergence égal à ρ et $\varphi^{(k)}(\zeta)\neq 0$.

On obtient immédiatement par identification

$$\varphi_n^{(s-1)}(z)=(z-\zeta)\varphi_n^{(s)}(z)-z^{n+1}\beta_n^{(s)} \qquad (1\leq s\leq k)$$

et, par suite,

$$f_n(z)=(z-\zeta)^k\varphi_n^{(k)}(z)-z^{n+1}\sum_{s=1}^{k}\beta_n^{(s)}(z-\zeta)^{s-1},$$

$$(1) \qquad (\zeta_{ni}-\zeta)^k\varphi_n^{(k)}(\zeta_{ni})=\zeta_{ni}^{n+1}\sum_{s=1}^{k}\beta_n^{(s)}(\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}$$

Or, $\varphi_n^{(k)}(\zeta_{ni})$ a pour limite $\varphi^{(k)}(\zeta)\neq 0$ car on a

$$|\varphi_n^{(k)}(\zeta_{ni})-\varphi^{(k)}(\zeta)|\leq|\varphi_n^{(k)}(\zeta_{ni})-\varphi^{(k)}(\zeta_{ni})|+|\varphi^{(k)}(\zeta_{ni})-\varphi^{(k)}(\zeta)|$$

et le premier module du second membre tend vers zéro en vertu de la convergence uniforme de $\varphi_n^{(k)}(z)$ vers $\varphi^{(k)}(z)$, tandis que le second tend vers zéro en vertu de la continuité de $\varphi^{(k)}(z)$ et de la convergence de ζ_{ni} vers ζ.

On a donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{k}{n}}=|\zeta|\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{s=1}^{k}\beta_n^{(s)}(\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}\right|^{\frac{1}{n}}.$$

On doit avoir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{1}{n}}\leq 1,$$

car, à partir d'un certain rang, $|\zeta_{ni}-\zeta|<1$.

Si l'on suppose

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{1}{n}}=1,$$

comme

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\beta_n^{(s)}|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\rho} \qquad (1\leq s\leq k),$$

on aurait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\beta_n^{(s)}(\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}|^{\frac{1}{n}}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\beta_n^{(s)}|^{\frac{1}{n}}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{s-1}{n}}=\frac{1}{\rho};$$

et $\beta_n^{(s)}(\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}$ pourrait être considéré comme le coefficient du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme d'une série entière dont le rayon de convergence serait $\geq\rho$, et par suite

$$\sum_{s=1}^{k}\beta_n^{(s)}(\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}$$

serait aussi le coefficient du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme d'une série entière dont le rayon de convergence est $\rho_1 \geqq \rho$ et l'on aurait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{k}{n}} = |\zeta| \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho_1} < 1$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On doit donc avoir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{1}{n}} < 1$$

et par suite

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta_n^{(s)} (\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\rho} \qquad (2 \leqq s \leqq k).$$

La série entière dont le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme a pour coefficient $\beta_n^{(s)}(\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}$ a donc, pour $s \geqq 2$, un rayon de convergence $> \rho$

De plus, la série $\sum \beta_n^{(1)} z^n$ a le rayon de convergence ρ, de sorte que $\sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)}(\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}$ est le coefficient du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme d'une série dont le rayon de convergence est ρ.

On a donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho},$$

et, par suite,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho} \quad (1).$$

---

(1) Voici une autre démonstration qui nous a été communiquée par M. Montel.

Soit

$$f(z) = (z-\zeta)^k \varphi(z) = (z-\zeta)(b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots), \qquad \overline{\lim} |b_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho}.$$

On a,

$$f_n(z) = (z-\zeta)(b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n) - b_n z^{n+1},$$
$$(\zeta_n - \zeta)(b_0 + b_1 \zeta_n + \ldots + b_n \zeta_n^n) = b_n \zeta_n^{n+1}$$

et par suite

$$(1') \qquad (\zeta_n-\zeta)^k \varphi(\zeta_n) = \zeta_n^{n+1} [b_n + (\zeta_n - \zeta)(b_{n+1} + b_{n+2}\zeta_n + \ldots)]$$

qui remplace notre formule (1).

Or,

$$|b_{n+p}| \leqq \frac{M}{(\rho-\varepsilon)^{n+p}}, \qquad |\zeta_n| < |\zeta| + \varepsilon$$

et par suite

$$|b_{n+1} + b_{n+2}\zeta_n + \ldots| < \frac{1}{(\rho-\varepsilon)^n} \frac{M}{\rho - |\zeta| - 2\varepsilon},$$

La formule

$$(1) \qquad (\zeta_{ni}-\zeta)^k \varphi_n^{(k)}(\zeta_{ni}) = \zeta_{ni}^{n+1} \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1},$$

peut servir à étudier le comportement des zéros ζ_{ni} quand, le rayon de convergence de la série $f(z)$ étant infini, $f(z)$ est une *fonction entière d'ordre fini r*. On sait que (1)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)}{n\log n} = \frac{1}{r}.$$

ou

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n\log n}} = e^{-\frac{1}{r}}.$$

$f(z)$ étant d'ordre r, $\varphi^{(s)}(z)(1 \leq s \leq k)$ est aussi d'ordre r, de sorte que

$$(2) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta_n^{(s)}|^{\frac{1}{n\log n}} = e^{-\frac{1}{r}} \qquad (1 \leq s \leq k).$$

Nous ferons usage du *lemme* suivant :

Soit

$$u_n = \sum_{j=1}^{k} v_n^{(j)},$$

où k est un nombre fixe, et $\{\mu_n\}$, une suite de nombres positifs qui tendent vers l'infini, alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|^{\frac{1}{\mu_n}} \leq \max_j \left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} |v_n^{(j)}|^{\frac{1}{\mu_n}} \right\}.$$

En effet, posons

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |v_n^{(j)}|^{\frac{1}{\mu_n}} = \tau_j \qquad (1 \leq j \leq k),$$

et soit τ_1, par exemple, tel que $\tau_1 \geq \tau_j (1 \leq j \leq k)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver N tel que pour $n > N$

$$|v_n^{(j)}| \leq (\tau_j + \varepsilon)^{\mu_n} \qquad (1 \leq j \leq k)$$

---

d'où l'on tire

$$\overline{\lim} |b_{n+1} + b_{n+2}\zeta_n + \dots|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\rho};$$

et l'on déduit successivement de la formule (1')

$$\overline{\lim} |\zeta_n - \zeta|^{\frac{1}{n}} < 1, \qquad \overline{\lim} |\zeta_n - \zeta|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho}.$$

(1) *Voir* par exemple TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, 2e édition, p. 253, Oxford.

et par suite,

$$|u_n| \leq \sum_{j=1}^{k} (\tau_j + \varepsilon)^{\mu_n} \leq k(\tau_1 + \varepsilon)^{\mu_n},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|^{\frac{1}{\mu_n}} \leq \tau_1 + \varepsilon.$$

Si l'on a $\tau_1 > \tau_j (2 \leq j \leq k)$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |u_n|^{\frac{1}{\mu_n}} = \tau_1.$$

Il n'y a en effet qu'à appliquer le lemme à

$$\varphi_n^{(1)} = u_n - \sum_{j=2}^{k} \varphi_n^{(j)}.$$

Nous pouvons maintenant montrer que l'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n \log n}} = e^{-\frac{1}{r}}.$$

En effet, si l'on suppose

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{1}{n \log n}} = 1,$$

le lemme appliqué à (1) donnera, en tenant compte de (2),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n \log n}} \leq e^{-\frac{1}{r}} < 1,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{1}{n \log n}} < 1$$

et par suite

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta_n^{(s)} (\zeta_{ni} - \zeta)^{s-1}|^{\frac{1}{n \log n}} < e^{-\frac{1}{r}} \qquad (2 \leq s \leq k)$$

tandis que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta_n^{(1)}|^{\frac{1}{n \log n}} = e^{-\frac{1}{r}}.$$

Appliquant le lemme, on obtient

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n \log n}} = e^{-\frac{1}{r}}.$$

Remarque. — On peut évidemment appliquer cette méthode au cas d'une série entière ayant un rayon de convergence fini.

CHAPITRE II.

Étude des moyennes de Cesàro d'ordre entier r associées a une série entière.

Nous ferons usage de la formule suivante, mise en évidence par M. Fekete (1).

$$f_n^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{f_n(z)}{z^{n+1}}\right\}, \tag{1}$$

où la $r^{\text{ième}}$ moyenne de Cesàro $f_n^{[r]}(z)$ est définie par

$$f_n^{[r]}(z) = \frac{\sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} f_s(z)}{\binom{n+r}{r}}, \qquad (r \geq 1).$$

Conservons les notations du Chapitre I mais posons, pour simplifier, $\varphi^{(k)}(z) = \varphi(z)$.

Les $f_n^{[r]}(z)$, qui convergent uniformément vers $f(z)$ dans toute région intérieure au cercle de convergence de $f(z)$ auront exactement k zéros ζ_{ni} qui tendent vers ζ. On a

$$f_n(z) = (z-\zeta)^k \varphi_n(z) + z^{n+1} \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (z-\zeta)^{s-1}$$

et, si $r \geq k$,

$$f_n^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{(z-\zeta)^k \frac{\varphi_n(z)}{z^{n+1}}\right\}$$

$$= (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \sum_{s=0}^{k} \binom{r}{s}\binom{k}{s} s! (z-\zeta)^{k-s} \frac{d^{r-s}}{dz^{r-s}}\left\{\frac{\varphi_n(z)}{z^{n+1}}\right\};$$

ou, en faisant encore usage de la formule (1),

$$f_n^{[r]}(z) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{z^s}{\binom{n+r}{s} s!} \binom{r}{s}\binom{k}{s} s! (z-\zeta)^{k-s} \varphi_n^{[r-s]}(z) \tag{2}$$

$$= \frac{z^k}{n^k} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{r}{s}\binom{k}{s} s! \left(1-\frac{\zeta}{z}\right)^{k-s} n^{k-s} \frac{\varphi_n^{[r-s]}(z)\, n^s}{\binom{n+r}{s} s!},$$

(1) *C. R. Acad. Sc.* t. 157, octobre 1913.

ou

$$\frac{n^k}{z^k} f_n^{(r)}(z) = \mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z}), \tag{2'}$$

avec

$$\mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z}) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{k}{s} s!\, \mathrm{Z}^{k-s} \Phi_n^{(r-s)}(\mathrm{Z}),$$

$$\mathrm{Z} = n\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{\zeta}{\left(1 - \frac{\mathrm{Z}}{n}\right)}.$$

et

$$\Phi_n^{(r-s)}(\mathrm{Z}) = \frac{\varphi_n^{(r-s)}(z)\, n^s}{\binom{n+r}{s} s!} \qquad (0 \leq s \leq k).$$

Considérons le polynome,

$$\mathrm{L}_{rk}(\mathrm{Z}) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{k}{s} s!\, \mathrm{Z}^{k-s}.$$

Dans toute région finie R du plan des Z, les fonctions $\Phi_n^{(r-s)}(\mathrm{Z})$ tendent uniformément vers la constante $\varphi(\zeta) \neq 0$. En effet, il correspond à R, par la transformation $z = \frac{\zeta}{\left(1 - \frac{\mathrm{Z}}{n}\right)}$, une suite de régions du plan des z qui tendent vers le point ζ, de plus, les $\Phi_n^{(r-s)}(\mathrm{Z})\,(0 \leq s \leq k)$ sont, à un facteur numérique près qui tend vers 1, égaux aux $\varphi_n^{(r-s)}(z)$ et l'on a

$$|\varphi_n^{(r-s)}(z) - \varphi(\zeta)| \leq |\varphi_n^{(r-s)}(z) - \varphi(z)| + |\varphi(z) - \varphi(\zeta)|;$$

le premier module du second membre tend vers zéro et le second aussi car z tend vers ζ et la fonction $\varphi(z)$ est continue.

Cela étant, si l'on considère une région R du plan des Z qui contient tous les zéros $\alpha_i\,(1 \leq i \leq k)$ du polynome $\mathrm{L}_{rk}(\mathrm{Z})$, qui sont tous distincts et positifs (1), on peut afirmer que les fonctions $\mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z})$ qui, pour n assez grand, sont holomorphes dans R, tendront uniformément dans R, quand n tend vers l'infini, vers le polynome $\varphi(\zeta)\mathrm{L}_{rk}(\mathrm{Z})$. On en déduit que pour n assez grand les $\mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z})$ auront, dans R, exactement k zéros $\mathrm{Z}_{ni}\,(1 \leq i \leq k)$ qui tendront vers les k zéros α_i du polynome $\mathrm{L}_{rk}(\mathrm{Z})$; les Z_{ni} et les α_i étant ordonnés selon leurs modules croissants.

On déduit de (2') que, à tout zéro Z_{ni} de $\mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z})$ correspond, par la transformation $z = \frac{\zeta}{\left(1 - \frac{\mathrm{Z}}{n}\right)}$, un zéro z_{ni} de $f_n^{(r)}(z)$ qui tendra évidemment vers ζ quand

(1) *Voir* par exemple Polyá und Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, t. 2, p. 94 pour l'étude de ces polynomes qui sont des polynomes généralisés de Laguerre.

Z_{ni} tend vers α_i. La relation

$$Z_{ni}=n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right)$$

donne alors

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right)=\alpha_i \qquad (1\leq i\leq k). \tag{3}$$

On peut observer que (3) implique que les z_{ni} sont ordonnés suivant les valeurs croissantes de $|z_{ni}-\zeta|$ et l'on a par suite, avec les notations introduites précédemment, $z_{ni}=\zeta_{ni}$ et

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right)=\alpha_i \qquad (1\leq i\leq k). \tag{4}$$

Pour le cas où $1\leq r\leq k-1$, revenons à la formule

$$f_n(z)=(z-\zeta)^k\varphi_n(z)-z^{n+1}\sum_{s=1}^{k}\beta_n^{(s)}(z-\zeta)^{s-1}$$

On aura

$$f_n^{[r]}(z)=(-1)^r\frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r}r!}\frac{d^r}{dz^r}\left\{(z-\zeta)^k\frac{\varphi_n(z)}{z^{n+1}}\right\}-\nu_n(z),$$

où

$$\nu_n(z)=(-1)^r\frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r}r!}\frac{d^r}{dz^r}\left\{\sum_{s=1}^{k}\beta_n^{(s)}(z-\zeta)^{s-1}\right\}.$$

On en déduit

$$f_n^{[r]}(z)=\frac{z^k}{n^k}\left\{\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{k}{s}s!\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)^{k-s}n^{k-s}\frac{\varphi_n^{(r-s)}(z)\,n^s}{\binom{n+r}{s}s!}-\frac{n^k\nu_n(z)}{z^k}\right\}.$$

Si l'on effectue la transformation introduite précédemment et que l'on pose $N_n(Z)=\nu_n(z)$, on aura

$$\frac{n^k}{z^k}f_n^{[r]}(z)=\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{k}{s}s!\,Z^{k-s}\Phi_n^{(r-s)}(Z)-\frac{n^kN_n(Z)\left(1-\frac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k}=\Lambda_{kr}^{(n)}(Z).$$

Considérons maintenant le polynome de degré k

$$\Lambda_{kr}(Z)=Z^{k-r}L_{kr}(Z)$$

et une région finie R du plan des Z qui contient tous les zéros du polynome $\Lambda_{kr}(Z)$, c'est-à-dire $\alpha_0=0$ de multiplicité $k-r$ et $\alpha_i\,(1\leq i\leq r)$ ordonnés suivant leurs modules croissants; alors, pourvu que

$$\frac{n^kN_n(Z)\left(1-\frac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k}$$

tende uniformément vers zéro dans la région R, on peut, comme précédemment, affirmer que $\Lambda_{kr}^{(n)}(Z)$ possède k zéros $Z_{ni}(1 \leq i \leq k)$ qui, ordonnés suivant leurs modules croissants, vérifient

$$\lim_{n\to\infty} Z_{ni} = \alpha_0 = 0 \qquad (1 \leq i \leq k-r)$$

$$\lim_{n\to\infty} Z_{n,k-r+i} = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq r),$$

et par suite, pour les zéros correspondants ζ_{ni} de $f_n^{(r)}(z)$, on aura

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right) = 0 \qquad (1 \leq i \leq k-r),$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{n,k-r+i}}\right) = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq r). \tag{5}$$

Il reste à montrer que $\dfrac{n^k N_n(Z)\left(1 - \dfrac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k}$ tend uniformément vers zéro dans la région R. Pour établir ce fait, considérons $v_n(z) = N_n(Z)$. On a

$$v_n(z) = (-1)^r \frac{z^{n-r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \sum_{s=0}^{k-r-1} \frac{(r+s)!}{s!} \beta_n^{(r+s+1)} (z-\zeta)^s = \sum_{p=1}^{k-r} \gamma_n^{(p)} z^{n-k-p+1}, \tag{6}$$

où les $\gamma_n^{(p)}$ sont des combinaisons linéaires, à coefficients indépendants de n, des $\dfrac{\beta_n^{(r+s+1)}}{\binom{n+r}{r}}$, pour lesquels on a par suite

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\gamma_n^{(p)}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\varrho_p}, \qquad \varrho_p \leq \varrho.$$

On en déduit que, dans toute région intérieure au cercle de convergence de $f(z)$, $v_n(z)$ tend vers zéro comme $\theta^n (0 < \theta < 1)$ et l'on a par suite, uniformément dans R,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k N_n(Z)\left(1 - \dfrac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k} = 0.$$

Quant aux $k-r$ zéros ζ_n du polynome $f_n^{(r)}(z)$ qui tendent vers ζ suivant la loi

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n}\right) = 0,$$

on peut montrer qu'ils satisfont, plus précisément, à la loi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\zeta_n - \zeta\right|^{\frac{k-r}{n}} = \frac{|\zeta|}{\varrho}. \tag{6'}$$

Pour cela, on considère l'identité

$$(7)\qquad f_n^{(r)}(z) = \nu_n(z) + \frac{z^r}{n^r}(z-\zeta)^{k-r}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{k}{s}s!\,Z^{r-s}\Phi_n^{(r-s)}(Z).$$

Pour

$$z = \zeta_n \quad \text{ou} \quad Z = n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_n}\right),$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{k}{s}s!\,Z^{r-s}\Phi_n^{(r-s)}(Z)$$

tend vers $(-1)^r\binom{k}{r}r!\,\varphi(\zeta)\neq 0$ et par suite

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_n-\zeta|^{\frac{k-r}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\nu_n(\zeta_n)|^{\frac{1}{n}}.$$

De plus,

$$\nu_n(\zeta_n) = (-1)^r\frac{\zeta_n^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r}r!}\sum_{s=0}^{k-r-1}\frac{(r+s)!}{s!}\beta_n^{(r+s+1)}(\zeta_n-\zeta)^s,$$

et l'on peut répéter ici le raisonnement du Chapitre I pour l'étude de $\sum_{s=1}^{k}\beta_n^{(s)}(\zeta_n-\zeta)^{s-1}$. On obtient ainsi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_n-\zeta|^{\frac{k-r}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho}.$$

Dans le cas où $f(z)$ est une fonction entière d'ordre s par exemple, on peut obtenir une précision analogue à celle du Chapitre I.

Remarque. — Le fait que les zéros du polynome $L_{rk}(Z)(r\geq k)$ sont positifs et distincts permet de déduire de (4) une information complémentaire intéressante, dans le cas où ζ *et les* a_ν *sont réels*. Dans ce cas, *les* k *zéros* ζ_{ni} de $f_n^{(r)}(z)$ *sont*, pour $n\geq n_0$, *réels, et distincts, séparés de l'origine par* ζ.

La réalité des $\zeta_{ni}(1\leq i\leq k)$, pour n assez grand, est évidente pour $k=1$.

Pour $k\geq 2$, la négation de la réalité des ζ_{ni} pour $1\leq i\leq k$ entraînerait l'existence d'une suite infinie de nombres conjugués ζ_{n,i_1} et ζ_{n,i_2}. Ceci implique, d'après (4), que α_{i_1} et α_{i_2} soient conjugués; ce qui contredit le fait qu'ils sont réels et distincts.

Si maintenant on fait usage de (4) sous la forme

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n\frac{\zeta_{ni}-\zeta}{\zeta} = \alpha_i > 0 \qquad (1\leq i\leq k),$$

on voit que, ζ sépare, pour n assez grand, les zéro $\zeta_{ni}(1\leq i\leq k)$ de l'origine.

La réalité des zéros ζ_{ni}, dans les conditions précédentes, a été établie par M. Fekete dans sa Note aux *Comptes rendus* de 1913, d'une façon élémentaire et

sans faire usage de la formule (4), qui lui a permis de reconnaître les inégalités $0<|\zeta|<|\zeta_{ni}|$.

On peut, dans les mêmes hypothèses établir pour $r \leqq k-1$, la réalité des r zéros $\zeta_{n,k-r+i}$ $(1 \leqq i \leqq r)$ de $f_n^{[r]}(z)$ qui satisfont à (5) et aussi le fait qu'ils sont séparés de l'origine par ζ. En particulier, *pour* $r=k-1$, *le seul zéro de* $f_n^{[r]}(z)$ *qui tend vers* ζ, *suivant la loi* (6') *est réel*. Mais on ne peut rien dire au sujet des positions respectives des trois points $0, \zeta, \zeta_n$,

Degré d'approximation en un point par les moyennes de Cesàro.

On peut déduire des formules (2) et (7) le degré d'approximation par les Moyennes de Cesàro, en un point ζ intérieur au cercle de convergence.

Pour un zéro ζ de $f(z)$, d'ordre de multiplicité $k \leqq r$, intérieur à ce cercle, on a, d'après (2),

$$f_n^{(r)}(\zeta)=(-1)^k \frac{\zeta^k}{\binom{n+r}{k} k!} \binom{r}{k} k!\, \varphi_n^{[r-k]}(\zeta)$$

et par suite

$$\lim_{n\to\infty} n^k f_n^{[r]}(\zeta)=(-1)^k \zeta^k \binom{r}{k} f^{(k)}(\zeta),$$

où $f^{(k)}(z)$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $f(z)$.

De même, pour un zéro ζ d'ordre de multiplicité $k>r$, on a par la formule (7)

$$f_n^{[r]}(\zeta)=-\nu_n(\zeta)$$

et par suite, d'après (6)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n^{[r]}(\zeta)|^{\frac{1}{n}}=\frac{|\zeta|}{\rho}.$$

Si maintenant ζ *est un point quelconque du cercle de convergence* de $f(z)$ et si l'on pose

$$h(z)=f(z)-f(\zeta),$$

ζ sera un zéro de $h(z)$ et l'on aura

$$h_n^{[r]}(z)=f_n^{[r]}(z)-f(\zeta).$$

Si ζ est un zéro d'ordre k pour $h(z)$,

$$f'(\zeta)=f''(\zeta)=\ldots=f^{k-1}(\zeta), \qquad f^{k}(\zeta)\neq 0,$$

on aura, pour $k \leqq r$,

$$\lim_{n\to\infty} \{f_n^{[r]}(\zeta)-f(\zeta)\}\, n^k=(-1)^k \zeta^k \binom{r}{k} f^{k}(\zeta)$$

et, pour $k>r$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n^{[r]}(\zeta)-f(\zeta)|^{\frac{1}{n}}=\frac{|\zeta|}{\rho}.$$

CHAPITRE III.

Polynomes de Jensen (1) associés a une série entière.

Étant donnée la série entière $f(z)$, associons-lui le polynome de Jensen d'ordre n

$$J_n(f) = \alpha_0^{(n)} a_0 + \alpha_1^{(n)} a_1 z + \alpha_2^{(n)} a_2 z^2 + \ldots + \alpha_n^{(n)} a_n z^n,$$

où

$$\alpha_0^{(n)} = \alpha_1^{(n)} = 1, \qquad \alpha_k^{(n)} = \prod_{s=1}^{k-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right) \qquad (2 \leq k \leq n).$$

Si l'on observe que

$$\alpha_{k+1}^{(n)} = \alpha_k^{(n)} - \frac{k}{n} \alpha_k^{(n)},$$

on voit que le polynome de Jensen associé à f s'écrit

$$J_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \alpha_n^{(n)} f_k.$$

Posant $\beta_{nk} = \dfrac{k\alpha_k^{(n)}}{n}$ et observant que les β_{nk} sont positifs et que

$$\lim_{n \to \infty} \beta_{nk} = 0, \qquad \sum_k \beta_{nk} = 1,$$

on, voit que l'on est dans les conditions d'application du théorème de Tœplitz (2), et l'on peut affirmer que $J_n(f)$, dans les mêmes conditions que f_n, tend uniformément vers f.

f ayant au point $\zeta \neq 0$, intérieur au cercle de convergence, un zéro d'ordre de multiplicité k, nous nous proposons de montrer que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \left(\frac{\zeta}{\zeta_{ni}} - 1 \right) = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq k), \tag{1}$$

où, les α_i sont les zéros du polynome d'Hermite $H_k(z)$ d'ordre k défini par les formules

$$H_0 = 1,$$
$$H_s(Z) = ZH_{s-1}(Z) - H'_{s-1}(Z) \qquad (s \geq 1).$$

---

(1) Introduits par M. Fekete (*C. R. Acad. Sc.*, t. 158, mai 1914), où leurs zéros sont étudiés dans le voisinage d'un zéro réel ζ de la fonction $f(z)$ représentée par une série entière à coefficients réels.

(2) *Voir* par exemple Knopp, *Theory and application of infinite series*, p. 391 (Blackie and Son.)

Les zéros α_i du polynome d'Hermite H_k sont réels, distincts et opposés. Nous les supposerons ordonnés de sorte que le premier zéro soit le zéro éventuel nul, les $\left[\frac{k}{2}\right]$ suivants étant les zéros positifs ordonnés suivant leurs grandeurs croissantes et enfin les $\left[\frac{k}{2}\right]$ derniers étant les zéros négatifs ordonnés suivant leurs modules croissants. L'ordre correspondant pour les $\zeta_{ni}(1 \leq i \leq k)$ est le suivant : si k est impair, le premier zéro ζ_{n1}, est le plus proche de ζ, puis on aura $\left[\frac{k}{2}\right]$ zéros tels que l'argument de $\frac{\zeta_{ni}-\zeta}{\zeta}$ soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et qui sont ordonnés selon les valeurs croissantes de $|\zeta_{ni}-\zeta|$, enfin on aura $\left[\frac{k}{2}\right]$ zéros tels que l'argument de $\frac{\zeta_{ni}-\zeta}{\zeta}$ soit compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ et ordonnés selon les valeurs croissantes de $|\zeta_{ni}-\zeta|$. Si k est pair nous n'aurons point à considérer le zéro le plus proche de ζ.

Pour démontrer (1), nous observerons d'abord que l'on a pour toute fonction φ holomorphe dans $|z|<\rho$.

$$j_n\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)j_n(\varphi) - \frac{z^2}{n}j'_n(\varphi).$$

En effet, si l'on pose

$$\varphi = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

on aura

$$j_n\{(z-\zeta)\varphi\} = -\zeta j_n(\varphi) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} a_{k-1} z^k = -\zeta j_n(\varphi) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)}\left(1-\frac{k}{n}\right) a_k z^{k+1}$$

$$= -\zeta j_n(\varphi) + z j_n(\varphi) - \frac{z^2}{n} j'_n(\varphi).$$

Cela étant, f ayant au point ζ un zéro d'ordre de multiplicité k, on peut écrire $f=(z-\zeta)^k\varphi(z)$, $\varphi(\zeta)\neq 0$.

Nous sommes ainsi conduits à étudier les zéros du polynome $j_n\{(z-\zeta)^k\varphi\}$ lorsque l'on a de plus

$$\left\{\lim_{n\to\infty} j_n(\varphi)\right\}_{z=\zeta} = \varphi(\zeta) \neq 0.$$

Faisons le changement de variable $Z = \sqrt{n}\left(\frac{z}{\zeta}-1\right)$ et posons

$$j_n\{(z-\zeta)^s\varphi\} = J_s(Z, n) \qquad (0 \leq s \leq k).$$

La relation

$$j_n\{(z-\zeta)^s\varphi\} = z(z-\zeta)j_n\{(z-\zeta)^{s-1}\varphi\} - \frac{z^2}{n}j'_n\{(z-\zeta)^{s-1}\varphi\}$$

devient

$$\frac{\sqrt{n}}{\zeta} J_s(Z, n) = Z J_{s-1}(Z, n) - \left(1+\frac{Z}{\sqrt{n}}\right)^2 J'_{s-1}(Z, n). \tag{2}$$

Posant

$$\frac{\sqrt{n}}{\zeta}=\lambda, \qquad \left(1+\frac{Z}{\sqrt{n}}\right)^2=1+\varepsilon,$$

on voit, que ε, qui est une fonction de Z et de n, tend uniformément vers zéro quand n tend vers l'infini, Z restant dans une région finie de son plan.

De plus, la relation de récurrence (2) s'écrit

$$\lambda J_s=ZJ_{s-1}-(1+\varepsilon)J'_{s-1} \qquad (s=1, 2, \ldots).$$

La première de ces relations

$$\lambda J_1=ZJ_0-(1+\varepsilon)J'_0$$

s'écrit aussi

$$\lambda J_1=ZJ_0+\gamma_1 J_0+\mu_1^{(1)}J'_0,$$

où

$$\gamma_1=0, \qquad \mu_{(1)}^1=-(1+\varepsilon).$$

Supposons que l'on ait obtenu

$$\lambda^s J_s=H_s J_0+\gamma_s J_0+\mu_s^{(1)}J'_0+\mu_s^{(2)}J''_0+\ldots+\mu_s^{(s)}J_0^{(s)},$$

où γ_s tend uniformément vers zéro quand n augmente indéfiniment et où $\mu_s^{(r)}(1\leq r\leq s)$ est borné dans toute région finie du plan des Z. Nous allons montrer qu'une telle relation sera encore vraie pour J_{s+1}, avec des coefficients ayant les mêmes propriétés

On a, en effet,

$$\lambda^s J'_s=H'_s J_0+\gamma'_s J_0+\nu_s^{(1)}J'_0+\nu_s^{(2)}J''_0+\ldots+\nu_0^{(s)}J_0^{(s)}+\nu_s^{(s+1)}J_0^{(s+1)},$$

où

$$\nu_s^{(1)}=(\mu_s^{(1)})'+\gamma_s+H_s,$$
$$\nu_s^{(r)}=(\mu_s^{(r)})'+\mu_s^{(r-1)} \qquad (r\geq 2).$$

sont bornés.

Par suite,

$$\lambda^{s+1}J_{s+1}=\lambda^s ZJ_s-\lambda^s(1+\varepsilon)J'_s$$

peut s'écrire

$$\lambda^{s+1}J_{s+1}=H_{s+1}J_0+\gamma_{s+1}J_0+\mu_{s+1}^{(1)}J'_0+\mu_{s+1}^{(2)}J''_0+\ldots+\mu_{s+1}^{(s+1)}J_0^{(s+1)},$$

où

$$\gamma_{s+1}=Z\gamma_s-(1+\varepsilon)\gamma'_s-\varepsilon H'_s$$

tend uniformément vers zéro, et

$$\mu_{s+1}^{(r)}=Z\mu_s^{(r)}-(1+\varepsilon)\nu_s^{(r)}$$

est uniformément borné.

On a donc

$$\lambda^k J_k=H_k J_0+\gamma_k J_0+\mu_k^{(1)}J'_0+\mu_k^{(2)}J''_0+\ldots+\mu_k^{(k)}J_0^{(k)}. \tag{3}$$

De plus, $J_0(Z, n)$ tend uniformément vers $\varphi(\zeta)$ quand n augmente indéfiniment; ses dérivées $J_0^{(s)}(Z, n)$ tendent, par suite, uniformément vers zéro. Enfin, γ_k tendant uniformément vers zéro et les $\mu_k^{(r)}$ étant uniformément bornés, on en déduit que le second membre de (3) tend uniformément vers $\varphi(\zeta)H_k(Z)$ dans toute région finie du plan des Z.

Les zéros de $J_k(Z, n)$, les plus voisins de l'origine, tendent donc vers les k zéros du polynome d'Hermite d'ordre k.

Remarque. — Lorsque ζ et les a_n, $n = 0$, sont réels on peut, comme pour les Moyennes de Cesàro, établir que les k zéros ζ_{ni} de $f_n(f)$ qui tendent vers ζ, sont, pour n assez grand, des nombres réels, distincts, $\left[\frac{k}{2}\right]$ d'entre eux étant inférieurs à ζ et $\left[\frac{k}{2}\right]$ supérieurs à ζ,

Le fait que les zéros soient réels et distincts a été démontré par M. Fekete dans sa Note aux *Comptes rendus* de 1914 sans faire usage de la formule (1) qui lui a permis par la suite de localiser les zéros par rapport à ζ.

CHAPITRE IV.

Suites de Fekete.

La formule

$$f_n^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{f_n(z)}{z^{n+1}}\right\}$$

de M. Fekete, peut être considérée comme une opération qui associe à la suite $f_n(z)$ une autre suite de polynomes $f_n^{[r]}(z)$ dont les zéros voisins de $\zeta \neq 0$. possèdent une propriété remarquable.

Cette même formule permet d'associer à toute suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$ qui convergent vers $f(z)$, uniformément dans un voisinage de ζ, une autre suite de fonctions $f_{nn}^{[r]}(z)$ que nous nous proposons d'étudier (1).

(1) Nous avons appris, plus tard, que ce procédé avait été utilisé (dans un cas plus restreint) par M. Fekete et Mlle E. Held qui ont associé pour r entier positif à la suite de polynomes $p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{(n)} z^\nu$ convergeant uniformément dans un domaine $(\mathfrak{D})$ vers la fonction $f(z)$, sous la condition $|p_n(z) - f(z)| = c\theta^n$, $0 < c < \infty$, $0 < \theta < 1$, une autre suite de polynomes

$$p_n^{[r]}(z) = \frac{1}{\binom{n+r}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{(n)} \binom{n+r-\nu}{n} z^\nu = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{p_n(z)}{z^{n+1}}\right\}$$

de degrés n en z et ont étendu, sous les conditions énoncées, aux polynomes $p_n^{[r]}(z)$, les résultats établis pour les zéros des Moyennes de Cesàro.

Nous montrerons que *si* $f_n(z)$ *converge vers* $f(z)$, uniformément dans une région $(\mathcal{D})$, $f_{nn}^{[r]}(z)$ *convergera aussi vers* $f(z)$, uniformément dans toute région $(\mathcal{D}_1)$ intérieure à $(\mathcal{D})$.

Nous montrerons aussi que, sous certaines conditions concernant le degré d'approximation de $f(z)$ par les $f_n(z)$ dans le voisinage de ζ, une partie des résultats, obtenus pour les zéros des Moyennes de Cesàro $f_n^{[r]}(z)$, demeurent vrais pour la suite $f_{nn}^{[r]}(z)$.

Soit $\psi(z)$ holomorphe dans une région $(\mathcal{D})$ du plan des z. Considérons pour $z \neq 0$, $r \geq 0$, l'opération

$$\psi_n^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{\psi(z)}{z^{n+1}}\right\} \quad (1). \tag{1}$$

On a, pour $r \geq 1$,

$$\psi_n^{[r]}(z) = -\frac{z^{n+r+1}}{n+r}\frac{d}{dz}\left\{\frac{\psi_n^{[r-1]}(z)}{z^{n+r}}\right\} = \psi_n^{[r-1]}(z) - \frac{z}{n+r}\left(\psi_n^{[r-1]}(z)\right)'.$$

Cette formule montre que si pour $s \geq 1$, $\{\psi_n^{[s-1]}(z)\}$ est une suite de fonctions holomorphes convergeant vers la fonction holomorphe $\psi(z)$, uniformément dans la région $(\mathcal{D})$, $\{\psi_n^{[s]}(z)\}$ sera aussi une suite de fonctions holomorphes convergeant vers $\psi(z)$, uniformément dans toute région fermée $(\mathcal{D}_1)$ complètement intérieure à $(\mathcal{D})$; $(\psi_n^{[s-1]}(z))'$ est en effet holomorphe et uniformément bornée dans $(\mathcal{D}_1)$.

De plus,

$$\psi_n^{[0]}(z) = \psi(z), \qquad \psi_n^{[1]}(z) = \psi(z) - \frac{z}{n+1}\psi'(z)$$

et ceci montre que, dans $(\mathcal{D}_1)$, les fonctions $\psi_n^{[r]}(z)$, pour $r \geq 0$, convergent uniformément vers $\psi(z)$.

Plus généralement, pour une suite arbitraire de fonctions holomorphes $\omega_n(z)$ qui convergent vers la fonction $\omega(z)$, uniformément dans $(\mathcal{D})$, la suite associée des fonctions $\omega_{nn}^{[r]}(z)$ définies par la formule

$$\omega_{nn}^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{\omega_n(z)}{z^{n+1}}\right\}, \tag{1'}$$

qui correspond à (1) pour $\psi(z) = \omega_n(z)$, converge vers $\omega(z)$, uniformément dans $(\mathcal{D}_1)$. Il suffit, pour le voir, d'observer que $\omega_{nn}^{[0]}(z) = \omega_n(z)$ possède cette propriété.

---

(1) La fonction $\psi_n^{[r]}(z)$ pour $r \geq 1$ est définie par (1) partout dans $(\mathcal{D})$, sauf pour $z = 0$ s'il appartient à $(\mathcal{D})$. Dans ce cas, on complète la définition en posant

$$\psi_n^{[r]}(0) = \lim_{z \to 0} \psi_n^{[r]}(z).$$

Considérons maintenant une suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$ qui convergent uniformément dans $(\mathcal{D})$ vers la fonction $f(z)$ et soit $\zeta \neq 0$ un zéro d'ordre de multiplicité k de $f(z)$, intérieur à $(\mathcal{D})$.

Posons

$$f(z) = f_n(z) + \varepsilon_n(z) = (z-\zeta)^k \varphi(z). \tag{2}$$

On a

$$f_{nn}^{(r)}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{f_n(z)}{z^{n+1}}\right\} \qquad (r \geq 0)$$

ou, d'après (2),

$$f_{nn}^{(r)}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{(z-\zeta)^k \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}} - \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}}\right\}.$$

Supposons $1 \leq r \leq k-1$, le traitement pour le cas $r \geq k$ étant tout à fait analogue.

On a

$$f_{nn}^{(r)}(z) = -\varepsilon_{nn}^{(r)}(z) + \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \frac{z^s}{\binom{n+r}{s} s!} \binom{r}{s}\binom{k}{s} s! (z-\zeta)^{k-s} \varphi_n^{(r-s)}(z)$$

$$= \frac{z^k}{n^k}\left\{\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s}\binom{k}{s} s! \left(1-\frac{\zeta}{z}\right)^{k-s} n^{k-s} \frac{\varphi_n^{(r-s)}(z) n^s}{\binom{n+r}{s} s!} - \frac{n^k \varepsilon_{nn}^{(r)}(z)}{z^k}\right\}$$

En posant

$$Z = n\left(1-\frac{\zeta}{z}\right) \quad \text{ou} \quad z = \frac{\zeta}{\left(1-\frac{Z}{n}\right)},$$

$$\Phi_n^{(r-s)}(Z) = \frac{\varphi_n^{(r-s)}(z) n^s}{\binom{n+r}{s} s!} \qquad (0 \leq s \leq r),$$

$$E_{nn}^{(r)}(Z) = \varepsilon_{nn}^{(r)}(z),$$

il vient

$$\frac{n^k}{z^k} f_{nn}^{(r)}(z) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s}\binom{k}{s} s! Z^{k-s} \Phi_n^{(r-s)}(Z) - \frac{n^k E_{nn}^{(r)}(Z)\left(1-\frac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k} = \Lambda_{kr}(Z).$$

Considérons le polynome de degré k

$$\Lambda_{kr}(Z) = Z^{k-r} L_{kr}(Z),$$

où

$$L_{kr}(Z) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s}\binom{k}{s} s! Z^{r-s}$$

et une région finie R du plan des Z qui contient tous les zéros du polynome $\Lambda_{kr}(Z)$ c'est-à-dire $\alpha_0 = 0$ d'ordre de multiplicité $k-r$ et $\alpha_i (1 \leq i \leq r)$ ordonnés selon leurs grandeurs croissantes, alors, *pourvu que dans cette région* $\frac{n^k E_{nn}^{(r)}(Z)\left(1-\frac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k}$ *tende uniformément vers zéro*, on peut, comme précédemment, affirmer qu'il y a k zéros $Z_{ni} (1 \leq i \leq k)$ de $\Lambda_{kr}^{(n)}(Z)$ qui, ordonnés selon leurs modules croissants, satisfont à

$$\lim_{n\to\infty} Z_{ni} = \alpha_0 = 0 \qquad (1 \leq i \leq k-r),$$
$$\lim_{n\to\infty} Z_{n,k-r+i} = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Les zéros ζ_{ni} *de* $f_{nn}^{(r)}(z)$ *qui leurs correspondent satisfont donc aux lois*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right) = 0 \qquad (1 \leq i \leq k-r),$$
$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_{n,k-r+i}}\right) = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Il reste à examiner sous quelles conditions

$$\Delta_n^{(r)}(Z) = \frac{n^k E_{nn}^{(r)}(Z)\left(1-\frac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k} = \frac{n^k \varepsilon_{nn}^{[r]}(z)}{z^k}$$

tend uniformément vers zéro dans R. Considérons $\varepsilon_{nn}^{[r]}(z) = E_{nn}^{(r)}(Z)$. On a par la formule (1′)

$$\varepsilon_{nn}^{[r]}(z) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \frac{z^s}{\binom{n+r}{s} s!}\, \varepsilon_n^{(s)}(z), \tag{3}$$

où $\varepsilon_n^{(s)}(z)$ désigne la dérivée d'ordre s de $\varepsilon_n(z)$.

De plus, les formules de Cauchy

$$\varepsilon_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t-\zeta|=\rho} \frac{\varepsilon_n(t)}{t-z}\,dt, \qquad \varepsilon_n^{(s)}(z) = \frac{(-1)^s s!}{2\pi i}\oint_{|t-\zeta|=\rho} \frac{\varepsilon_n(t)}{(t-z)^{s+1}}\,dt,$$

où z est intérieur au cercle de centre ζ et de rayon ρ, lequel est intérieur à $(\mathcal{C})$, montrent que si λ_n est une borne supérieure pour $|\varepsilon_n(t)|$ sur la circonférence $|t-\zeta| = \rho$, on aura, pour z satisfaisant à $|z-\zeta| \leq \frac{\rho}{2}$,

$$|\varepsilon_n^{(s)}(z)| \leq \lambda_n \frac{s!\, 2^{s+1}}{\rho^s} \qquad (0 \leq s \leq r).$$

L'expression (3) montre alors que l'on a, dans les mêmes conditions,

$$|\varepsilon_{nn}^{[r]}(z)| < A_r \lambda_n,$$

où A_r est une constante indépendante de n.

On voit alors sur l'expression de $\Delta_n^{(r)}(Z)$ qu'il suffit de supposer $|\varepsilon_n(z)| = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, uniformément dans un voisinage de ζ ne contenant pas l'origine pour être sûr que, dans R, $\Delta_{nn}^{[r]}(Z)$ tend uniformément vers zéro.

Quant aux $k-r$ *zéros* ζ_n *de* $f_{nn}^{(r)}(z)$ *qui tendent vers* ζ *suivant la loi*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_n}\right)=0,$$

ils satisfont à

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_n-\zeta|^{\frac{k-r}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\varepsilon_{nn}^{[r]}(\zeta_n)|^{\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

Il suffit pour le voir de considérer

$$f_{nn}^{[r]}(z) = -\varepsilon_{nn}^{[r]}(z) + \frac{z^r}{n^r}(z-\zeta)^{k-r}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{k}{s}s!\,Z^{r-s}\Phi_n^{r-s}(Z)$$

et d'observer que pour $z=\zeta_n$ ou $Z=n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_n}\right)$, Σ tend vers $(-1)^r\binom{k}{r}r!\,\varphi(\zeta)\neq 0$.

La formule (4) pourrait donner des informations additionnelles si l'on faisait des hypothèses supplémentaires sur le comportement de $\varepsilon_n(z)$ quand n tend vers l'infini.

Remarque. — Dans le cas où ζ *est réel* et où, dans un voisinage de ζ *pour* n assez grand, $f_n(z)$ *vérifie la condition* $f_n(z)=\overline{f_n(\bar z)}$, *les zéros* ζ_{ni} *sont*, pour n assez grand, *réels, distincts, séparés de l'origine par* ζ, *pourvu que* $r\geq k$; tandis que *pour* $r=k-1$, ils sont tous *réels et distincts*, $k-2$ d'entre eux étant séparés de l'origine par ζ.

CHAPITRE V.

Moyennes de Hölder associées a une série entière.

Posons

$$h_n^{(0)}=f_n,$$

$$(n+1)h_n^{(r)}=\sum_{\nu=0}^{n}h_\nu^{(r-1)}\qquad (r\geq 1).$$

On sait que les $h_n^{(r)}$ tendent uniformément vers f quand n tend vers l'infini.

Nous laisserons de côté l'étude de $h_n^{(0)}$ et celle de $h_n^{(1)}$ qui ont déjà été faites, car les $h_n^{(0)}$ représentent les *sommes partielles* et les $h_n^{(1)}$, les *moyennes de Cesàro d'ordre* 1 et nous étudierons séparément le *cas d'un zéro simple* et celui d'un *zéro multiple* de $f(z)$.

Cas d'un zéro simple. — Posons

$$f=(z-\zeta)\varphi, \qquad \varphi(\zeta)\neq 0,$$

$$\varphi(z)=\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu z^\nu.$$

On a

$$h_n^{(0)}(f)=h_n^{(0)}\{(z-\zeta)\varphi\}=(z-\zeta)h_n^{(0)}(\varphi)-b_n z^{n+1},$$

$$(n+1)h_n^{(1)}(f)=\sum_{\nu=0}^{n}h_\nu^{(0)}(f)=\sum_{\nu=0}^{n}\{(z-\zeta)h_\nu^{(0)}(\varphi)-b_\nu z^{\nu+1}\}$$

$$=(n+1)(z-\zeta)h_n^{(1)}(\varphi)-zh_n^{(0)}(\varphi)$$

et par suite

$$h_n^{(1)}\{(z-\zeta)\varphi\}=(z-\zeta)h_n^{(1)}(\varphi)-\frac{z}{n+1}\mu_n^{(0)}(\varphi),$$

où

$$\mu_n^{(0)}=h_n^{(0)}.$$

Un calcul analogue montre que l'on a

$$h_n^{(r)}\{(z-\zeta)\varphi\}=(z-\zeta)h_n^{(r)}(\varphi)-\frac{z}{n+1}\mu_n^{(r-1)}(\varphi), \tag{1}$$

où

$$\mu_n^{(r)}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\mu_\nu^{(r-1)}}{\nu+1} \qquad (r\geq 1).$$

Nous avons maintenant à obtenir le comportement asymptotique de $\mu_n^{(r)}$. Pour cela, considérons

$$\mu_n^{(1)}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\mu_\nu^{(0)}}{\nu+1}$$

et

$$\psi_n^{(1)}=\frac{\mu_n^{(1)}}{\log(n+1)}=\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\mu_\nu^{(0)}}{\nu+1} \qquad (n\geq 1).$$

Si l'on pose

$$a_{\nu n}=\begin{cases}\dfrac{1}{\nu\log(n+1)} & \text{pour } \nu\leq n+1,\\ 0 & \text{pour } \nu>n+1,\end{cases}$$

on voit que

$$\lim_{n\to\infty}a_{\nu n}=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu}a_{\nu n}=1$$

et l'on peut alors appliquer le théorème de Tœplitz (¹), de sorte que

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n^{(1)}(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\mu_n^{(0)}(\varphi)=\lim_{n\to\infty}h_n^{(0)}(\varphi)=\varphi.$$

(¹) *Voir* seconde note chapitre III.

De même,

$$\mu_n^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu_\nu^{(1)}}{\nu+1} = \mu_0^{(1)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\log(\nu+1)}{\nu+1} \psi_\nu^{(1)}$$

et, $\frac{\log x}{x}$ étant constamment décroissant à partir du point $x = e$, on en déduit que la série $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\log \nu}{\nu}$ est asymptotiquement égale à $\int_1^n \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{1}{2}(\log n)^2$, de sorte que si l'on pose

$$\psi_n^{(2)} = \frac{\mu_n^{(2)}}{\frac{1}{2}\log(n+1)^2} \qquad (n \geq 1),$$

on aura, comme précédemment,

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{(2)}(\varphi) = \varphi.$$

Des calculs analogues montrent que

$$\psi_n^{(r)} = \frac{\mu_n^{(r)}\, r!}{\{\log(n+1)\}^r}$$

vérifie

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{(r)}(\varphi) = \varphi.$$

La relation (1) s'écrivant

$$h_n^{(r)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta) h_n^{(r)}(\varphi) - \frac{z}{n+1} \frac{\{\log(n+1)\}^{r-1}}{(r-1)!} \psi_n^{(r-1)}(\varphi), \tag{1'}$$

le changement de variable

$$\frac{(r-1)!\, n}{(\log n)^{r-1}} \left(\frac{z}{\zeta} - 1\right) = Z_n$$

montre que pour le zéro z de $h_n^{(r)}$ qui tend vers ζ, on a

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = 1.$$

Cas d'un zéro multiple. — Posons

$$f = (z-\zeta)^k \varphi(z), \qquad \varphi(\zeta) \neq 0,$$

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu.$$

Nous introduirons des quantités à quatre indices entiers

$$\overset{(s)}{(l)}\varphi_n^{(r)}$$

définies par récurrence de la façon suivante

$$ {}^{1}\varphi_n = \int_0^z \varphi_n(t)\,dt, $$

$$ {}^{s}\varphi_n = \int_0^z {}^{s-1}\varphi_n(t)\,dt \qquad (s \geq 2), $$

et

$$ {}^{s}\varphi_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{{}^{s}\varphi_\nu^{(r-1)}}{\nu+1}, $$

ou

$$ {}^{s}\varphi_n^{(r)} = {}^{s}\varphi_{n-1}^{(r)} + \frac{1}{n+1}\,{}^{s}\varphi_n^{(r-1)}. $$

Ces deux dernières formules nous permettent de définir ${}^{(s)}\varphi_n^{(r)}$ pour r entier positif ou négatif, pourvu que l'on connaisse ${}^{(s)}\varphi_n^{(0)} = {}^{(s)}\varphi_n$. (Un indice supprimé doit en général être entendu comme égal à zéro.)

On posera enfin

$$ (1^{\text{bis}}) \qquad \begin{cases} {}^{(1)}\varphi_n^{(r)} = {}^{(s)}\varphi_n^{(r)} + {}^{s}\varphi_n^{(r-1)}, \\ {}^{(s)}\varphi_n^{(r)} = l_{n-1}\,{}^{(s)}\varphi_n^{(r)} + {}^{(s-1)}\varphi_n^{(r-1)} \qquad (l \geq 1). \end{cases} $$

Établissons maintenant la formule

$$ (2) \qquad \mu_n^{(r)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)\mu_n^{(r)}(\varphi) - {}^{1}\varphi_n^{(r-1)} \qquad (r \geq 1). $$

On a

$$ \mu_n^{(0)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)\mu_n^{(0)}(\varphi) - b_n z^{n-1}, $$

$$ \mu_n^{1} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu_\nu^{0}}{\nu+1}, $$

$$ \mu_n^{(1)}\{(z-\zeta)\varphi\} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(z-\zeta)\mu_\nu^{(0)}(\varphi) - b_\nu z^{\nu+1}}{\nu+1}, $$

ou

$$ \mu_n^{(1)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)\mu_n^{(1)}(\varphi) - {}^{1}\varphi_n, $$

ce qui est la formule (2) pour $r=1$.

La formule (2) supposée vraie pour $r=j$, il est facile de vérifier qu'elle est vraie pour $r=j+1$. On a en effet,

$$ \mu_n^{(j+1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu_\nu^{(j)}}{\nu+1}, $$

$$ \mu_n^{(j+1)}\{(z-\zeta)\varphi\} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(z-\zeta)\mu_\nu^{(j)}(\varphi) - {}^{1}\varphi_\nu^{(j-1)}}{\nu+1} $$

ou

$$ \mu_n^{(j+1)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)\mu_n^{(j+1)}(\varphi) - {}^{1}\varphi_n^{(j)}, $$

ce qui démontre la formule dans le cas général.

Établissons aussi la formule générale

$$(3)\qquad {}^{s}\{(z-\zeta)\varphi\}_n^{(r)} = (z-\zeta)^{s}\varphi_n^{(r)} - s^{(s+1)}\varphi_n^{(r)} - {}^{s+1)}\varphi_n^{(r-1)},$$

valable pour r positif, nul ou négatif.

Observons d'abord que l'on a par définition

$${}^{1)}\varphi_n^{(-1)} = (n+1)({}^{1)}\varphi_n - {}^{1)}\varphi_{n-1}) = b_n z^{n+1}$$

et par suite

$${}^{1}\{(z-\zeta)\varphi\}_n = (z-\zeta)\varphi_n - {}^{1)}\varphi_n^{(-1)},$$

ce qui est la formule (3) écrite pour $r=0$, $s=0$.

Vérifions maintenant que si la formule (3) est vraie pour 0 et s, elle est encore vraie pour 0 et $s+1$.

On a, en effet,

$${}^{(s+1)}\{(z-\zeta)\varphi\}_n = \int_0^z {}^{(s)}\{(t-\zeta)\varphi(t)\}_n\,dt = \int_0^z (t-\zeta)^{s}\varphi_n(t)\,dt - s^{(s+2)}\varphi_{n-1} - {}^{(s+2)}\varphi_n^{(-1)};$$

intégrant par parties et observant que pour $s \geqq 0$ on a ${}^{(s-1)}\varphi_n(0)=0$, on obtient

$$\int_0^z (t-\zeta)^{s}\varphi_n(t)\,dt = \left[(t-\zeta)^{(s+1)}\varphi_n(t)\right]_0^z - \int_0^z {}^{s+1)}\varphi_n(t)\,dt = (z-\zeta)^{(s+1)}\varphi_n - {}^{(s+2)}\varphi_n,$$

de sorte que

$${}^{(s+1)}\{(z-\zeta)\varphi\}_n = (z-\zeta)^{s+1)}\varphi_n - (s+1)^{(s+2)}\varphi_n - {}^{(s+2)}\varphi_n^{(-1)}.$$

Observant maintenant que la relation

$${}^{s}\varphi_n^{(r-1)} = (n+1)({}^{s}\varphi_n^{(r)} - {}^{s}\varphi_{n+1}^{(r)})$$

qui est linéaire, nous permet de passer, dans la formule (3), de r à $r-1$ et que cette même relation, écrite sous la forme

$${}^{s}\varphi_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{{}^{s}\varphi_\nu^{(r-1)}}{\nu+1}$$

nous permet de passer de r à $r+1$, on voit que la formule (3), établie pour $r=0$, est vraie quelle que soit la valeur entière de r, positive, nulle ou négative.

Les relations (1″) permettent maintenant de déduire immédiatement de (3) la relation

$$(4)\qquad {}^{(s)}_{(t)}\{(z-\zeta)\varphi\}_n^{(r)} = (r-\zeta)^{(s)}_{(t)}\varphi_n^{(r)} - s^{(s+1)}_{(t)}\varphi_n^{(r)} - {}^{(s+1)}_{(t)}\varphi_n^{(r-1)},$$

dont un cas particulier est

$$(5)\qquad {}^{(s)}_{(s-1)}\{(z-\zeta)\varphi\}_n^{(r)} = (z-\zeta)_{(s-1)}^{(s)}\varphi_n^{(r)} - {}^{(s+1)}_{(s)}\varphi_n^{(r)}.$$

Les relations (1), (2) et (5) nous serviront à *établir le développement, valable pour r, $k \geq 2$,*

$$(6)\quad h_n^{(r)}\{(z-\zeta)^k\varphi\} = (z-\zeta)^k h_n^{(r)}(\varphi) - \frac{z}{n+1}\left\{\binom{k}{1}(z-\zeta)^{k-1}\mu_n^{(r-1)} - \binom{k}{2}(z-\zeta)^{k-2}\,{}^{(1)}\varphi_n^{(r-2)} + \dots + \binom{k}{j}(-1)^{j-1}(z-\zeta)^{k-j}\,{}^{(j-1)}\varphi_n^{(r-2)} + \dots + (-1)^{k-1}\,{}^{(k-1)}\varphi_n^{(r-2)}\right\}.$$

En effet, la formule (1) donne

$$h_n^{(r)}\{(z-\zeta)^2\varphi\} = (z-\zeta)h_n^{(r)}\{(z-\zeta)\varphi\} - \frac{z}{n+1}\mu_n^{(r-1)}\{(z-\zeta)\varphi\},$$

puis, les formules (1) et (2) donnent

$$h_n^{(r)}\{(z-\zeta)^2\varphi\} = (z-\zeta)^2 h_n^{(r)}(\varphi) - \frac{z}{n+1}\left\{\binom{2}{1}(z-\zeta)\mu_n^{(r-1)}(\varphi) - {}^{(1)}\varphi_n^{(r-2)}\right\}$$

et ceci est le développement (6) écrit pour $k=2$.

Si l'on suppose ce développement vrai pour $k=j$, les formules (1), (2) et (5) nous permettent de vérifier qu'il est vrai aussi pour $k=j+1$ et, par suite, qu'il est vrai dans le cas général.

Il nous faut maintenant examiner l'expression entre accolades dans le développement (6). Pour cela, observons que la relation

$${}^{(s)}\varphi_n^{(r)} = I_{(r-1)}\,{}^{(s)}\varphi_n^{(r)} + {}^{(s-1)}\varphi_n^{(r-1)}$$

permet d'écrire

$${}^{(j-1)}\varphi_n^{(r-2)} = (j-2)!\,{}^{(j-1)}\varphi_n^{(r-2)} + \sum_i \alpha_i^{(j-1)}\varphi_n^{(r-2-i)} \qquad (i>0),$$

où $r-2-i$ peut être positif, nul ou négatif et où les α_i sont des constantes indépendantes de n.

Le terme principal dans ce développement est le premier. En effet, pour $r-2-i<0$, on observera que ${}^{(1)}\varphi_n^{(-1)}$, étant égal à $b_n z^{n+1}$, tend vers zéro géométriquement et, par suite, que ${}^{(s)}\varphi_n^{(-1)}$ tend aussi vers zéro géométriquement. Faisant usage de la relation

$${}^{s}\varphi_n^{(r-1)} = (n+1)\left({}^{s}\varphi_n^{(r)} - {}^{s)}\varphi_{n-1}^{(r)}\right)$$

on voit que, dans ce cas, ${}^{(j-1)}\varphi_n^{(r-2-i)}$ tend vers zéro géométriquement.

Pour $r-2-i=0$, on observera que ${}^{(s)}\varphi_n^{(0)} = {}^{(s)}\varphi_n$ tend uniformément vers ${}^{(s)}\varphi$ qui est fini.

Pour $r-2-i>0$, nous ferons usage de la formule

$${}^{s}\varphi_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{{}^{(s)}\varphi_\nu^{(r-1)}}{\nu+1}$$

et des calculs, analogues à ceux déjà faits pour $\mu_n^{(r)}$, montrent que $\varphi_n^{(r-1)}\varphi_n^{(r-2-i)}$ est asymptotiquement égal à $\frac{(\log n)^{r-2-i}}{(r-2-i)!}\varphi_n^{(r-1)}\varphi_n$.

Le terme principal est donc le premier et son ordre est $(\log n)^{r-2}$. De plus, $\mu_n^{(r-1)}$ est de l'ordre de $(\log n)^{r-1}$.

Le changement de variable

$$Z=\left(\frac{z}{\zeta}-1\right)\left\{\frac{(r-2)!\,n}{(k-2)!\,(\log n)^{r-2}}\right\}^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{z}{\zeta}-1\right)\rho_n^{\frac{1}{k}}$$

ou

$$z=\zeta\left(1+Z\rho_n^{-\frac{1}{k}}\right),\qquad \rho_n=\frac{(r-2)!\,n}{(k-2)!\,(\log n)^{r-2}}$$

donne alors pour le développement (6)

$$\begin{aligned}
&h_n^{(r)}\{(z-\zeta)^k\varphi\}\\
&=\rho_n^{-1}\Bigg[\zeta^k Z^k H_n^{(r)}(Z)-\frac{\zeta\left(1+Z\rho_n^{-\frac{1}{k}}\right)}{n+1}\\
&\quad\times\Bigg\{\binom{k}{1}\zeta^{k-1}Z^{k-1}\rho_n^{\frac{1}{k}}M_n^{(r-1)}(Z)\\
&\quad-\binom{k}{2}\zeta^{k-2}Z^{k-2}\rho_n^{\frac{2}{k}}\Phi_n^{(r-2)}(Z)+\dots\\
&\quad+\binom{k}{j}(-1)^{j-1}\zeta^{k-j}Z^{k-j}\rho_n^{\frac{j}{k}}{}^{(j-1)}_{(j-2)}\Phi_n^{(r-2)}(Z)+\dots\\
&\quad\dots+(-1)^{k-1}\rho_n^{\frac{k-1}{k}}{}^{(k-1)}_{(k-2)}\Phi_n^{(r-2)}(Z)\Bigg\}\Bigg]=\rho_n^{-1}\zeta B_n(Z),
\end{aligned}$$

où

$$H_n^{(r)}(Z)=h_n^{(r)}(\varphi),\qquad M_n^{(r-1)}(Z)=\mu_n^{(r-1)},$$
$${}^{(j-1)}_{(j-2)}\Phi_n^{(r-2)}(Z)={}^{(j-1)}_{(j-2)}\varphi_n^{(r-2)}\qquad (2\leq j\leq k),$$

Considérons le binome

$$B(Z)=\zeta^{k-1}Z^k\varphi(\zeta)+(-1)^{k-(k-1)}\varphi(\zeta) \tag{7}$$

et une région finie R du plan Z contenant les k zéros α_i de $B(Z)$ $(1\leq i\leq k)$.

Il suit de ce qui précède que, dans cette région,

$$\frac{M_n^{(r-1)}(Z)\rho_n^{\frac{1}{k}}}{n+1}$$

qui est de l'ordre de

$$\frac{(\log n)^{r-1}n^{\frac{1}{k}}}{n(\log n)^{\frac{r-2}{k}}}=\frac{(\log n)^{\frac{(k-1)r-(k-2)}{k}}}{n^{\frac{k-1}{k}}},$$

tend uniformément vers zéro et aussi que

$$\frac{\rho_n^{\frac{j}{k}}{}^{(j-1)}_{(j-2)}\Phi_n^{(r-2)}(Z)}{n+1},\qquad (j<k),$$

qui est de l'ordre de

$$\frac{n^{\frac{j}{k}}(\log n)^{r-2}}{(\log n)^{\frac{(r-2)j}{k}}n} = \frac{(\log n)^{\frac{(r-2)(k-j)}{k}}}{n^{\frac{k-j}{k}}},$$

tend uniformément vers zéro, tandis que

$$\frac{\rho_n^{\frac{(k-1)}{(k-2)}}\Phi_n^{(r-2)}(Z)}{n}$$

tend uniformément vers ${}^{(k-1)}\varphi(\zeta)$.

De plus, $H_n^{(r)}(Z)$ tend uniformément vers $\varphi(\zeta)$.

Il s'ensuit que $B_n(Z)$ tend vers le binome $B(Z)$, uniformément dans R et, par suite, qu'il y a k zéros Z_{ni} de $B_n(Z)$ qui tendent vers les k zéros α_i de $B(Z)$, lesquels sont les sommets d'un polygone régulier de k côtés et de centre O, quand ${}^{(k-1)}\varphi(\zeta) \neq 0$, et coïncident avec l'origine quand ${}^{(k-1)}\varphi(\zeta) = 0$.

Aux k zéros $Z_{ni}(1 \leq i < k)$ de $B_n(Z)$ correspondent, par la transformation

$$z = \zeta\left(1 + Z\rho_n^{-\frac{1}{k}}\right),$$

k zéros z_{ni}, pour le polynome $h_n^{(r)}[(z-\zeta)^k\varphi]$, qui tendent vers ζ et pour lesquels on a, par suite,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{z_{ni}}{\zeta} - 1\right)\rho_n^{\frac{1}{k}} = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq k).$$

C'est la loi que nous avions en vue d'établir.

Remarque. — Dans le cas des Moyennes de Cesàro et dans celui des polynomes de Jensen, les zéros de l'équation limite étaient sur l'axe réel et cela nous a permis de déduire que dans le voisinage d'un zéro réel ζ de $f(z)$, à coefficients réels, les zéros des fonctions d'approximation étaient réels.

Dans le cas actuel, on ne peut faire une telle déduction; l'équation limite $B(Z) = 0$ implique que, quel que soit ζ, les z_{ni} sont « presque » régulièrement distribués autour de ζ, à moins que ${}^{(k-1)}\varphi(\zeta) = 0$.

Degré d'approximation, en un point, par les moyennes de Hölder.

Dans le cas d'un zéro simple ζ, la relation $(1')$ donne

$$h_n^{(r)}[f(\zeta)] = \frac{-\zeta}{n+1}\,\frac{[\log(n+1)]^{r-1}}{(r-1)!}\,\psi_n^{(r-1)}(\varphi),$$

de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{(r)}[f(\zeta)]\,\frac{n}{(\log n)^{r-1}} = \frac{-\zeta}{(r-1)!}f'(\zeta) \qquad (r \geq 2)$$

et dans le cas d'un zéro d'ordre $k \geq 2$, la formule (6) donne

$$h_n^{(r)}\{f(\zeta)\} = (-1)^k \frac{\zeta}{n+1} \binom{k-1}{k-2} \varphi_n^{(r-k+1)}(\zeta)$$

et $\binom{k-1}{k-2}\varphi_n^{(r-k+1)}$ étant asymptotiquement égal à $(k-2)!\,\frac{(\log n)^{r-2}}{(r-2)!}(k-1)\,\varphi_n$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{(r)}\{f(\zeta)\}\frac{n}{(\log n)^{r-2}} = (-1)^k\zeta\frac{(k-2)!}{(r-2)!}(k-1)\varphi(\zeta).$$

Si maintenant ζ *est un point quelconque du cercle de convergence* de $f(z)$ et si l'on pose

$$F(z) = f(z) - f(\zeta),$$

ζ sera un zéro de $F(z)$ et l'on aura

$$h_n^{(r)}\{F(z)\} = h_n^{(r)}\{f(z)\} - f(\zeta).$$

Si ζ *est un zéro simple, on aura*

$$\lim_{n\to\infty}[h_n^{(r)}\{f(\zeta)\} - f(\zeta)]\frac{n}{(\log n)^{r-1}} = \frac{-\zeta}{(r-1)!}f'(\zeta) \qquad (r \geq 2)$$

et *si* ζ *est un zéro d'ordre de multiplicité* $k \geq 2$, *on aura*

$$\lim_{n\to\infty}[h_n^{(r)}\{f(\zeta)\} - f(\zeta)]\frac{n}{(\log n)^{r-2}} = (-1)^k\zeta\frac{(k-2)!}{(r-2)!}(k-1)\varphi(\zeta) \qquad (r \geq 2).$$

CHAPITRE VI.

Sur les zéros des polynomes de convergence maximale.

Introduction et notations (1). — Soit C un ensemble fermé et borné du plan des z dont le complémentaire K est connexe et régulier en ce sens qu'il possède une fonction de Green $G(x, y)$ ayant un pôle à l'infini. La fonction

$$w = \varphi(z) = e^{G+iH},$$

où H est conjuguée de G dans K, réalise la représentation conforme de K sur l'extérieur du cercle-unité dans le plan des w, de sorte que les points à l'infini se correspondent.

Appelons C_R la courbe du plan des z définie par $|\varphi(z)| = R > 1$. Cette courbe est composée d'un nombre fini de courbes analytiques de Jordan, bornées et extérieures les unes aux autres ou bien ayant un nombre fini de points communs.

(1) *Voir* J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, p. 65 et suiv., New-York, 1935.

Soit $f(z)$ une fonction analytique et uniforme dans C. Il existe alors un plus grand nombre (fini ou infini), que nous désignerons toujours par ρ, tel que $f(z)$ soit analytique et uniforme en chaque point intérieur à C_ρ.

Nous dirons qu'une suite de polynomes $f_n(z)$, de degrés respectifs n, converge maximalement vers $f(z)$ sur C si à tout nombre R, tel que $\rho > R > 1$, il correspond un nombre fini M qui dépend de R mais non de n ni de z et tel que

$$|f(z)-f_n(z)| \leq \frac{M}{R^n} \qquad (z \in C). \tag{1}$$

De (1), on peut déduire [1]

$$|f(z)-f_n(z)| \leq M_1\left(\frac{\sigma}{R}\right)^n \qquad (z \in C_\sigma), \tag{2}$$

où $1 < \sigma < R$ et M_1 est indépendant de n et de z mais peut dépendre de σ et de R.

Lemme. — *Soit* C *un ensemble fermé et borné dont le complémentaire* K *est connexe et régulier. Soit $f(z)$ une fonction analytique et uniforme dans* C *et ζ un zéro d'ordre de multiplité k de $f(z)$, qui est à l'intérieur de C_ρ mais n'appartient pas à* C. *Soit $f_n(z)$ une suite de polynomes convergeant maximalement vers $f(z)$ sur* C, *et ζ_{nj} l'un des k zéros de $f_n(z)$ qui tendent vers ζ. Alors, si $w = \varphi(z)$ est la fonction qui réalise la représentation conforme de* K *sur l'extérieur du cercle $|w| \leq 1$ du plan des w, de sorte que les points à l'infini se correspondent, on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{nj}-\zeta|^{\frac{1}{n}} \leq \left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}} \qquad (1 \leq j \leq k).$$

Choisissons une courbe équipotentielle $C_\sigma (1 < \delta < R < \rho)$ telle que C_σ contienne le point ζ en son intérieur et posons

$$f(z) = (z-\zeta)^k g(z), \qquad g(\zeta) \neq 0.$$

On a, avec les notations du lemme et en tenant compte de (2),

$$|(\zeta_{nj}-\zeta)^k g(\zeta_{nj})| = |f(\zeta_{nj})| = |f(\zeta_{nj})-f_n(\zeta_{nj})| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_\sigma}\left|\frac{f(z)-f_n(z)}{z-\zeta_{nj}}\right| dz \leq \frac{1}{2\pi} L(C_\sigma)\frac{1}{\delta_n} M\left(\frac{\sigma}{R}\right)^n, \tag{3}$$

où $L(C_\sigma)$ désigne la longueur de C_σ et δ_n le minimum de $|z-\zeta_{nj}|$ quand z est sur C_σ.

ζ étant à l'intérieur de C_σ et ζ_{nj} tendant vers ζ, le nombre δ_n a une limite inférieure positive. De plus, $g(\zeta_{nj})$ tend vers $g(\zeta) \neq 0$ et l'on déduit de (3)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{nj}-\zeta|^{\frac{k}{n}} \leq \frac{\sigma}{R}. \tag{4}$$

[1] Walsh, *loc. cit.*, p. 81.

Mais R peut être pris aussi voisin que l'on veut de ρ et C_σ étant soumis à la seule condition que ζ soit en son intérieur, on peut prendre $\sigma > |\varphi(\zeta)|$ mais aussi voisin que l'on veut de $|\varphi(\zeta)|$ et (4) donne alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{nj}-\zeta|^{\frac{k}{n}} \leq \frac{|\varphi(\zeta)|}{\rho}. \tag{5}$$

Remarque. — Il est évident que dans (5) *le signe d'inégalité n'est pas toujours exclu:* car, considérons encore

$$f(z) = (z-\zeta)^k g(z), \qquad g(\zeta) \neq 0,$$

où $g(z)$ est analytique dans C. Soit $g_n(z)$ une suite de polynomes qui convergent maximalement vers $g(z)$ sur C.

On a, d'après (1),

$$|g(z)-g_n(z)| \leq M_1\left(\frac{1}{R}\right)^n, \qquad R>1, \qquad z\in C.$$

et par suite

$$(z-\zeta)^k |g(z)-g_n(z)| \leq \delta^k M_1\left(\frac{1}{R}\right)^n,$$

où δ est le maximum de $|z-\zeta|$ pour $z \in C$.

Cette relation peut s'écrire

$$|(z-\zeta)^k g_n(z) - f(z)| \leq M_2\left(\frac{1}{R}\right)^n, \qquad z\in C.$$

Posons

$$f_{n+k}(z) = (z-\zeta)^k g_n(z),$$

on aura

$$|f_n(z)-f(z)| \leq M_2\left(\frac{1}{R}\right)^n, \qquad z\in C.$$

La suite de polynomes $f_n(z)$ converge donc maximalement vers $f(z)$. Mais $f_n(z)$ admet le zéro $\zeta_n = \zeta$ et l'on a

$$|\zeta_n-\zeta|^{\frac{k}{n}} = |\zeta-\zeta|^{\frac{k}{n}} = 0,$$

ce qui montre que dans (5) c'est l'inégalité qui est vraie.

Le théorème suivant donne une classe de polynomes, de convergence maximale, pour lesquels on a exactement

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{nj}-\zeta|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\varphi(\zeta)|}{\rho} \qquad (1 \leq j \leq k).$$

Théorème. — *Supposons, avec les notations du lemme, que* $f_n(z)$ *soit de la forme*

$$f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu p_\nu(z).$$

où les a_ν sont des constantes et les $p_\nu(z)$ des polynomes de degré ν. Supposons de plus [ρ et $\varphi(z)$ ayant leurs sens usuels] *que l'on ait*

$$(c_1) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\alpha\rho},$$

$$(c_2) \qquad \lim_{n\to\infty} |p_n(z)|^{\frac{1}{n}} = \alpha |\varphi(z)|$$

uniformément dans un voisinage de ζ, extérieur à C, α étant une constante.

Dans ces conditions, on a exactement

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{nj} - \zeta|^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^k, \qquad (1 \leq j \leq k).$$

Posons

$$f(z) = (z-\zeta)^k g(z);$$

les polynomes $f_{n+1}(z)$ ayant exactement k zéros $\zeta_{n+1,j} (1 \leq j \leq k)$ tendant vers ζ, on posera aussi

$$(6) \qquad f_{n+1}(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - \zeta_{n+1,j}) g_{n+1}(z).$$

Montrons que $g_n(z)$ tend vers $g(z)$, uniformément dans un voisinage assez petit de ζ intérieur à C_ρ.

On a

$$g_n(z) - g(z) = \frac{f_n(z)}{\prod_j (z-\zeta_{nj})} - \frac{f(z)}{(z-\zeta)^k} = \frac{(z-\zeta)^k f_n(z) - f(z)\prod_j (z-\zeta_{nj})}{(z-\zeta)^k \prod_j (z-\zeta_{nj})} =$$

$$= \frac{\left\{(z-\zeta)^k - \prod_j (z-\zeta_{nj})\right\} f_n(z) + \prod_j (z-\zeta_{nj}) \{f_n(z) - f(z)\}}{(z-\zeta)^k \prod_j (z-\zeta_{nj})}.$$

On voit sur cette formule que $|g_n(z) - g(z)|$ tend uniformément vers zéro sur la frontière d'un petit cercle de centre ζ, intérieur à C_ρ (chacune des deux accolades tend vers zéro). Mais $g(z)$ et $g_n(z)$ étant holomorphes, on en conclut, par le principe du module maximum, que $|g(z) - g_n(z)|$ tend uniformément vers zéro dans un voisinage de ζ.

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} g_{n+1}(\zeta_{nj}) = g(\zeta) \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |g_{n+1}(\zeta_{nj})|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Considérons maintenant la formule (6), on a, si l'on désigne par ζ_{ni} l'un des k zéros de $f_n(z)$ qui tendent vers ζ,

$$f_{n+1}(\zeta_{ni}) = a_{n+1} p_{n+1}(\zeta_{ni}) = \prod_{j=1}^{k} (\zeta_{ni} - \zeta_{n+1,j}) g_{n+1}(\zeta_{ni}),$$

et par suite,

$$(7)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\prod_j(\zeta_{ni}-\zeta_{n+1,j})\right|^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}|p_{n+1}(\zeta_{ni})|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\alpha\rho}\,\alpha\,|\varphi(\zeta)|=\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|,$$

en tenant compte de (c_1) et (c_2) et en particulier de l'uniformité de la convergence dans (c_2).

On a, de plus, d'après le lemme,

$$(8)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{1}{n}}\leq\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}}\qquad(1\leq i\leq k),$$

$$(9)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{n+1,j}-\zeta|^{\frac{1}{n}}\leq\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}}\qquad(1\leq j\leq k).$$

On déduit de (8) et (9),

$$(10)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{ni}-\zeta_{n+1,j}|^{\frac{1}{n}}\leq\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}}\qquad(1\leq i,j\leq k).$$

Supposons que pour un zéro ζ_{nj_0} on ait

$$(11)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{nj_0}-\zeta|^{\frac{1}{n}}<\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}},$$

on en déduirait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{nj_0}-\zeta_{n+1,j_0}|^{\frac{1}{n}}<\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}}$$

et par suite, d'après (10),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\prod_{j=1}^{k}\zeta_{nj_0}-\zeta_{n+1,j}\right|^{\frac{1}{n}}\leq\prod_{j=1}^{k}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{nj_0}-\zeta_{n+1,j}|^{\frac{1}{n}}<\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|,$$

contrairement à (7). L'inégalité (11) est donc impossible et le théorème est démontré.

Applications.

Les conditions du théorème sont, par exemple, vérifiées dans les cas suivants.

Cas des polynomes orthogonaux. — C est supposé limité par une courbe rectifiable de Jordan Γ. Les polynomes $p_\nu(z)$ sont orthogonaux et normaux sur la courbe Γ. Si l'on détermine les a_ν par les relations

$$a_\nu=\int_\Gamma f(z)\,\overline{p_\nu(z)}\,dz\qquad(\nu=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

les fonctions

$$f_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu p_\nu(z)$$

convergeront maximalement vers $f(z)$.

De plus, on a (1)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\rho}, \tag{c_1}$$

$$\lim_{n\to\infty}|p_n(z)|^{\frac{1}{n}}=|\varphi(z)|, \tag{c_2}$$

uniformément dans un voisinage de ζ, pourvu que ζ ne soit pas un zéro de $\varphi'(z)$. Toutes les conditions du théorème sont donc satisfaites.

Cas des polynomes d'interpolation. — Soit $\beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}, \ldots, \beta_{n+1}^{(n)}$ un ensemble de $n+1$ points $z_k^{(n)}$ de C (points de Fekete) tels que le module du produit (déterminant de Vandermonde)

$$V_n(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots, z_{n+1}^{(n)})=\prod_{i<j=1}^{n+1}(z_i^{(n)}-z_j^{(n)})$$

soit maximum.

Ordonnons les points du tableau

$$\begin{array}{llll}\beta_1^{(0)},&&&\\ \beta_1^{(1)}, & \beta_2^{(1)},&&\\ \ldots. & \ldots,&&\\ \beta_1^{(n)}, & \beta_2^{(n)}, & \ldots. & \beta_{n+1}^{(n)},\\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots,\end{array}$$

en une suite simple $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$, les éléments étant pris suivant leur ordre dans chaque ligne et les lignes étant prises dans leur ordre.

Dans ces conditions, on a

$$\lim_{\nu\to\infty}|(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_\nu)|^{\frac{1}{\nu}}=\Delta|\varphi(z)|, \tag{c_2}$$

uniformément dans tout ensemble fermé et borné, intérieur à K, Δ étant la capacité (diamètre transfini) de C (2).

De plus, la série d'interpolation

$$a_0+a_1(z-z_1)+a_2(z-z_1)(z-z_2)+\ldots \tag{12}$$

de la fonction $f(z)$ aux points z_ν converge maximalement vers $f(z)$ sur C (3).

Enfin, on peut montrer que l'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\Delta\rho}. \tag{c_1}$$

---

(1) Walsh, *loc. cit.*, p. 128 et 132.
(2) Walsh, *loc. cit.*, p. 157.
(3) Walsh, *loc. cit.*, p. 159.

En effet, la série (12) étant convergente en tout point z intérieur à C_ρ, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n(z-z_1)\dots(z-z_n)|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \Delta |\varphi(z)| \leq 1,$$

et par suite,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\Delta |\varphi(z)|}.$$

z pouvant être pris aussi voisin qu'on le veut de la courbe C_ρ, définie par

$$|\varphi(z)| = \rho,$$

on obtient ainsi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\Delta \rho}.$$

Il est de plus facile, en faisant directement usage de deux théorèmes de Walsh (1), de voir que l'inégalité

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\Delta \rho}$$

est impossible.

Les conditions de notre théorème sont donc satisfaites.

Cas des sommes partielles d'une série entière. — ζ étant un zéro de multiplicité k pour la fonction $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, intérieur au cercle de convergence de rayon ρ_1 de la série, choisissons pour C un cercle centré à l'origine et de rayon $\alpha < |\zeta|$.

La fonction $\varphi(z)$, qui réalise la représentation conforme de l'extérieur de C sur l'extérieur du cercle $|w| \leq 1$, est évidemment $\varphi(z) = \frac{z}{\alpha}$. La courbe C_ρ est définie par

$$\varphi(z) = \rho, \qquad \left|\frac{z}{\alpha}\right| = \rho, \qquad |z| = \alpha\rho$$

et l'on a évidemment $\rho_1 = \alpha\rho$.

Les $f_n(z)$ étant les sommes partielles $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ et les $p_n(z)$ étant z^n, on a

$$(c_1) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\alpha\rho},$$

$$(c_2) \qquad \lim_{n\to\infty} |z^n|^{\frac{1}{n}} = |z| = \alpha \left|\frac{z}{\alpha}\right| = \alpha\,|\varphi(z)|.$$

Nous retrouvons ainsi le résultat de M. Fekete concernant les sommes partielles des séries entières.

(1) Walsh, *loc. cit.*, p. 83 et 157.

CHAPITRE VII.

Sur un problème inverse.

Soit une suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$ qui tendent, uniformément dans un domaine $(\mathcal{D})$, vers la fonction $f(z) \not\equiv 0$, ayant au point ζ un zéro d'ordre k de multiplicité et λ_n, une borne supérieure de $|f_n(z) - f(z)|$ quand z appartient à $(\mathcal{D})$. Si l'on pose

$$f(z) = (z-\zeta)^k \varphi(z), \qquad \varphi(\zeta) \neq 0,$$

on aura

$$f_n(z) - f(z) = f_n(z) - (z-\zeta)^k \varphi(z),$$

et, par suite, ζ_n étant un zéro de $f_n(z)$,

$$|\zeta_n - \zeta)^k \varphi(\zeta_n)| = |f_n(\zeta_n) + f(\zeta_n)| \leq \lambda_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_n - \zeta|^{\frac{k}{n}} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} (\lambda_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Cette formule donne une *limitation de la distance des zéros quand on possède une limitation de la distance des fonctions*, c'est-à-dire de la rapidité de l'approximation.

Inversement, on peut se poser le problème suivant :

Étant donné une opération $U(f)$ *qui associe, à toute fonction* f *d'une famille* $(\mathcal{F})$ *de fonctions holomorphes dans un domaine* $(\mathcal{D})$, *une suite* $\{f_n\}$ *de fonctions qui tendent vers* f *uniformément dans* $(\mathcal{D})$; *si l'on possède une limitation de l'écart des zéros de* f *et* f_n, *valable pour toutes les fonctions* f *de la famille, trouver des propriétés d'approximation de l'opération* U.

Il est évident que si l'on ne sait rien sur la famille $(\mathcal{F})$, ni sur la structure de l'opération U, le problème reste vague; on peut le préciser.

Posons

$$U(f) = \{f_n\}.$$

Nous supposerons que *la famille* $(\mathcal{F})$ *contienne, avec* f, *toutes les fonctions* $f + \alpha$ où α est une constante et que, de plus,

$$U(f+\alpha) = \{f_n + \alpha\}.$$

Enfin, on supposera donnée une *fonction positive* $u(z)$, *inférieure ou égale à* 1 *dans* $(\mathcal{D})$ *et telle que*, ζ *étant un zéro d'ordre* k *de multiplicité de* $f(z)$, *on ait*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_n - \zeta|^{\frac{k}{n}} \leq u(\zeta).$$

Avec ces hypothèses, on peut affirmer que, *pour toutes les fonctions $f(z)$ non constantes, on a l'inégalité*

$$\overline{\lim}\,|f_n(z)-f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq u(z).$$

Soit, en effet,

$$h(z)=(z-\zeta)^k\varphi(z), \qquad \varphi(\zeta)\neq 0,$$

une fonction de la famille $(\mathcal{F})$ et $U(h)=\{h_n(z)\}$. Posons

$$h_n(z)=\prod_{i=1}^{k}(z-\zeta_{ni})\varphi_{(n)}(z),$$

$\varphi_{(n)}(z)$ tend vers $\varphi(z)$, uniformément dans le voisinage de ζ, et par suite $\varphi_{(n)}(\zeta_{ni})$ tend vers $\varphi(\zeta)\neq 0$.

On a donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|h_n(\zeta)|^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\prod_{i=1}^{k}(\zeta-\zeta_{ni})\right|^{\frac{1}{n}}\leq\prod_{i=1}^{k}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta-\zeta_{ni}|^{\frac{1}{n}}\leq u(\zeta).$$

Soient maintenant $f(z)$ une fonction non constante de la famille $(\mathcal{F})$ et ζ un point de $(\mathcal{D})$.

La fonction $h(z)=f(z)-f(\zeta)$ appartient à $(\mathcal{F})$. Par hypothèse,

$$h_n(z)=f_n(z)-f(\zeta),$$

et par suite,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|f_n(\zeta)-f(\zeta)|^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|h_n(\zeta)|^{\frac{1}{n}}\leq u(\zeta),$$

ce qui démontre notre assertion.

On peut particulariser davantage et considérer la famille $(\mathcal{F})$ des *séries entières* ayant le cercle C_ρ, de centre zéro et de rayon ρ pour, cercle de convergence, puis *choisir pour $u(z)$ la fonction* $\frac{|z|}{\rho}$ pour $|z|<\rho$.

L'opération $U(f)$ sera définie par l'intermédiaire de la matrice de Tœplitz

$$\begin{array}{ccccccc}
b_{00}, & b_{01}, & b_{02}, & \ldots, & b_{0m}, & \ldots \\
b_{10}, & b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1m}, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots. & \ldots, \\
b_{n0}, & b_{n1}, & b_{n2}, & \ldots, & b_{nm}, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}$$

dont tous les éléments sont positifs et vérifient

$$\lim_{n\to\infty} b_{nm}=0 \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\sum_{m} b_{nm}=1 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Soit la fonction

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$$

de la famille $(\mathcal{F})$, posons

$$s_m(z) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu z^\nu.$$

La suite $\{f_n(z)\}$ *sera obtenue, à partir de la matrice de Tœplitz, par l'opération*

$$f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m(z).$$

Les fonctions $f_n(z)$ convergent vers $f(z)$, uniformément dans tout cercle $C_r(|z| \leq r < \rho)$ et l'on a

$$f_n(z) + \alpha = \sum_{m} b_{nm} [s_m(z) + \alpha],$$

α désignant une constante.

Nous allons montrer que, dans ces conditions, *les fonctions* $f_n(z)$ *convergent géométriquement vers* $f(z)$ en ce sens que, σ *et* r *étant deux nombres soumis aux conditions* $0 < \sigma < r < \rho$, *on peut leur associer une constante* M *indépendante de* n *et de* z, *mais pouvant dépendre de* σ *et de* r, *telle que*

$$|f_n(z) - f(z)| \leq M \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n, \qquad |z| \leq \sigma.$$

La démonstration est immédiate. On a, comme on l'a vu plus haut,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |f_n(z) - f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sigma}{\rho}, \qquad |z| \leq \sigma.$$

La fonction

$$F(z) = |a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + \ldots,$$

appartient à la famille $(\mathcal{F})$, donc,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |F_n(z) - F(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sigma}{\rho}, \qquad |z| \leq \sigma.$$

$F(z) - F_n(z)$ est une série entière à coefficients positifs et supérieurs aux modules des coefficients correspondants de la série $f(z) - f_n(z)$. On a, par suite,

$$F(\sigma) - F_n(\sigma) \geq |f(z) - f_n(z)|, \qquad |z| \leq \sigma.$$

De l'inégalité

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |F_n(\sigma) - F(\sigma)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sigma}{\rho},$$

on déduit,

$$F(\sigma) - F_n(\sigma) \leq M \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n,$$

quel que soit $r < \rho$, M étant une constante qui ne dépend que de σ et de r et non de n. Donc

$$|f_n(z) - f(z)| \leq M \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n, \qquad |z| \leq \sigma.$$

SUR

LES FONCTIONS CONTINUES MONOTONES

PAR M. CHI-TAI CHUANG.

INTRODUCTION.

Le théorème général de M. Borel sur les fonctions croissantes (1) a été mis sous une forme très précise par M. Nevanlinna comme il suit (2) :

Soit $u(r)$ une fonction positive et non décroissante pour $r > 0$. Soit $\varphi(t)$ une fonction positive et décroissante pour $t > 0$ telle que $\int_1^{\infty} \varphi(t)\,dt$ converge. Soit r_0 une valeur de r. Alors la longueur totale des intervalles pour lesquels

$$u\big(r + \varphi[u(r)]\big) \geq u(r) + 1 \qquad (r > r_0), \tag{1}$$

ne dépasse pas la limite

$$\varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\,dt, \qquad \text{où} \quad t_0 = u(r_0).$$

Dans ses recherches sur les fonctions méromorphes d'ordre infini, M. Valiron a obtenu le résultat suivant (3) qui appartient à la théorie des fonctions-types créée par MM. Blumenthal (4) et Kraft (5).

(1) É. BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Math.*, t. 20, 1897, p. 375-377).

(2) R. NEVANLINNA, *Remarques sur les fonctions monotones* (*Bull. Sci. math.*, 2e série, 55, 1931, p. 142-143).

(3) G. VALIRON, *Directions de Borel des fonctions méromorphes* (*Mém. Sc. math.*, fasc. 89, 1938, p. 24-29).

(4) O. BLUMENTHAL, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Collection Borel, 1910, Chap. II).

(5) A. KRAFT, *Ueber ganze transcendante Functionen von unendlicher Ordnung* (*Inaug. Diss.*, Göttingen, 1903).

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini. Soit $\omega(x)$ une fonction décroissante telle que $\int^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx$ converge et que $\omega(x)\sqrt{x} > 1$. Soit τ un nombre positif. Alors il existe une fonction non décroissante $\rho(r)$ telle que la fonction $U(r) = r^{\rho(r)}$ possède les propriétés suivantes :

1° *A partir d'une valeur de r, on a*

$$U\big(r + \omega[U(r)]\big) < e^{\tau} U(r). \tag{2}$$

2° *$T(r, f)$ étant la fonction caractéristique de $f(z)$, on a*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{T(r, f)}{U(r)} = 1.$$

Le présent Mémoire est une suite de ces travaux de M. Nevanlinna et de M. Valiron. Nous considérons les fonctions $f(x)$ continues monotones pour $x \geq 0$. En employant les méthodes de M. Borel et de M. Blumenthal, présentées sous une forme nouvelle, nous établissons deux propriétés générales de ces fonctions. Notre contribution principale consiste dans la substitution des constantes 1 et τ, figurant dans les inégalités (1) et (2), par une fonction $\delta(x)$ à décroissance assez lente pour que l'intégrale $\int_0^{\infty} \delta(x)\, dx$ diverge.

PREMIÈRE PARTIE.

Première propriété générale des fonctions continues monotones.

I. — Théorèmes fondamentaux.

1. Théorème I. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

a. $f(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geq 0$; $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.

b. $\gamma(t)$ est positive, continue et non croissante pour $t \geq 0$ et est telle que $\int_0^{\infty} \gamma(t)\, dt$ converge.

c. $\delta(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geq 0$ et est telle que $\int_0^{\infty} \delta(x)\, dx$ diverge. Alors on a

$$f\big(x + \gamma[f(x)]\big) - f(x) < \delta(x),$$

sauf au plus dans une suite d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\int_0^{x} \delta(x)\, dx$ ne dépasse pas $\delta(0)\gamma(0) + \int_0^{\infty} \gamma(t)\, dt$.

2. Théorème 2. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

a. $f(x)$ est continue et non croissante pour $x \geq 0$; $0 < f(x) \leq 1$ pour $x \geq 0$.

b. $\gamma(t)$ est positive, continue et non croissante pour $0 < t \leq 1$ et est telle que $\int_0^1 \gamma(t)\,dt$ converge.

c. $\delta(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geq 0$ et est telle que $\int_0^x \delta(x)\,dx$ diverge. Alors on a

$$f(x + \gamma|f(x)|) - f(x) \geq -\delta(x),$$

sauf au plus dans une suite d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\int_0^x \delta(x)\,dx$ ne dépasse pas $\int_0^1 \gamma(t)\,dt$.

II. — Lemmes de base.

3. Lemme 1. — *Soit $X(x)$ une fonction définie pour $x \geq 0$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° $X(x) > x$ pour $x \geq 0$.

2° A chaque nombre positif A correspond un nombre positif l tel que pour $0 \leq x \leq A$ on ait $X(x) \geq x + l$.

Soit x_0 une valeur de x. Alors la suite

$$x_0, \qquad x_1 = X(x_0), \qquad x_2 = X(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_n = X(x_{n-1}), \qquad \ldots$$

est croissante et tend vers l'infini avec n.

D'après la condition 1°, la suite x_n est croissante. Supposons que la suite x_n soit bornée. Désignons par A_0 sa borne supérieure. Alors, si petit que soit le nombre positif ε, il existe un entier n tel que la valeur $x' = x_n$ vérifie les inégalités

$$0 \leq x' < A_0, \qquad X(x') < A_0 < x' + \varepsilon,$$

résultat qui est incompatible avec la condition 2°. Donc la suite x_n est non bornée et tend vers l'infini avec n.

4. Lemme 2. — *Soit E un ensemble fermé de points de l'intervalle $x \geq 0$. Soit $X(x)$ une fonction définie pour $x \geq 0$ satisfaisant aux conditions 1° et 2° dans le lemme 1. Alors :*

A. si E est non borné, il existe une suite infinie de points de E : c_n ($n = 0$) telle que :

1° $X(c_n) \leq c_{n+1}$ pour $n \geq 0$;

2° chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n \leq x \leq X(c_n)$ ($n = 0$);

B. *si* E *est borné, il existe une suite finie de points de* E : $c_n (0 \leq n \leq k)$ *telle que :*

1° $X(c_n) \geq c_{n+1}$ *pour* $0 \leq n \leq k-1$;

2° *chaque point de* E *appartient à l'un des intervalles* $c_n \leq x < X(c_n) (0 \leq n \leq k)$.

Examen du cas A. Soient E non borné et $X(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme 2. x étant un point de l'intervalle $x \geq 0$, désignons par P_x l'ensemble des points communs à E et à l'intervalle $x' \geq X(x)$, et par $\chi(x)$ la borne inférieure de P_x. Évidemment :

α. $\chi(x)$ est un point de E ;

β. $\chi(x) \geq X(x)$;

γ. il n'existe pas de point ξ qui, à la fois, appartient à E et vérifie les inégalités $X(x) \leq \xi < \chi(x)$.

L'inégalité (β) montre que $\chi(x)$ satisfait aux conditions 1° et 2° dans le lemme 1. Désignons par c_0 la borne inférieure de E. c_0 est un point de E.

On peut donc appliquer le lemme 1 à $\chi(x)$ et c_0. Par conséquent, la suite

$$c_0, \quad c_1 = \chi(c_0), \quad c_2 = \chi(c_1), \quad \ldots, \quad c_n = \chi(c_{n-1}), \quad \ldots$$

est croissante et tend vers l'infini avec n. D'après (α), les points c_n appartiennent à E. D'après (β), on a $c_n = \chi(c_{n-1}) \geq X(c_{n-1})$. Considérons un point ξ de E. Soit n l'entier tel que $c_{n-1} \leq \xi < c_{n-1} = \chi(c_n)$. D'après ($\gamma$), on a $\xi < X(c_n)$. Donc ξ appartient à l'intervalle $c_n \leq x < X(c_n)$.

Examen du cas B. Soient E borné et $X(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme 2. Désignons par M la borne supérieure de E, et par S la somme de E et de l'intervalle $x \geq M+1$. S et $X(x)$ rentrent dans le cas précédent. Soit donc $c_n (n \geq 0)$ la suite correspondant à S et $X(x)$. Alors $c_0 \leq M$ et c_n croît indéfiniment. Soit k l'entier tel que $c_n \leq M$ pour $0 \leq n \leq k$ et que $c_n > M$ pour $n \geq k+1$. On voit immédiatement que la suite finie $c_n (0 \leq n \leq k)$ possède les propriétés exigées.

III. — Démonstration du théorème 1.

5. Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions a, b et c du théorème 1. Désignons par E l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles

$$f\big(x + \gamma[f(x)]\big) - f(x) \leq \delta(x).$$

Distinguons trois cas suivant que E est non borné, ou borné, ou nul.

Premier cas. — E est non borné. Alors E et $X(x) = x + \gamma[f(x)]$ rentrent dans le cas A du lemme 2. Donc il existe une suite infinie de points de E : $c_n (n \geq 0)$ telle que :

1° $X(c_n) \leq c_{n+1}$ pour $n \geq 0$;

2° chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n \leq x < X(c_n) (n \geq 0)$.

Nous allons démontrer que

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{x} \int_{c_n}^{X(c_n)} \delta(x)\,dx \leq \delta(0)\gamma(0) + \int_0^x \gamma(t)\,dt.$$

Posons $d_n = X(c_n)$. $\delta(x)$ et $\gamma(t)$ étant non croissantes, on a

$$(2) \qquad \int_{c_n}^{d_n} \delta(x)\,dx \geq \delta(c_n)(d_n - c_n) \geq \delta(c_n)\gamma[f(c_n)],$$

$$(3) \qquad \int_{f(c_n)}^{f(d_n)} \gamma(t)\,dt \geq \gamma[f(d_{n-1})][f(d_{n-1}) - f(c_{n-1})].$$

Mais d'après 1° $c_{n-1} < c_n$, et c_{n-1} est un point de E; on a

$$(4) \qquad \delta(c_n) - \delta(c_{n-1}) \geq f(d_{n-1}) - f(c_{n-1}).$$

D'autre part, d'après 1° $d_{n-1} \geq c_n$, et $\gamma[f(x)]$ est non croissante; on a

$$(5) \qquad \gamma[f(d_{n-1})] \leq \gamma[f(c_n)].$$

Enfin, en tenant compte du fait que $\delta(x)$ et $\gamma(t)$ sont positives, on tire de (2), (3), (4), (5), les inégalités suivantes

$$\int_{c_n}^{d_n} \delta(x)\,dx \leq \delta(c_0)\gamma[f(c_0)], \qquad \int_{c_n}^{d_n} \delta(x)\,dx \leq \int_{f(c_n)}^{f(d_n)} \gamma(t)\,dt.$$

D'où on trouve que

$$\sum_{n=0}^{x} \int_{c_n}^{d_n} \delta(x)\,dx \leq \delta(c_0)\gamma[f(c_0)] + \int_{f(c)}^{x} \gamma(t)\,dt,$$

ce qui donne l'inégalité (1).

Deuxième cas. — E est borné. Alors E et $X(x) = x + \gamma[f(x)]$ rentrent dans le cas B du lemme 2. Donc il existe une suite finie de points de E: $c_n (0 \leq n \leq k)$ telle que :

1° $X(c_n) \leq c_{n+1}$ pour $0 \leq n \leq k-1$;

2° chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n \leq x < X(c_n) (0 \leq n \leq k)$.

Comme dans le cas précédent, on démontre que

$$\sum_{n=0}^{k} \int_{c_n}^{X(c_n)} \delta(x)\,dx \leq \delta(0)\gamma(0) + \int_0^x \gamma(t)\,dt.$$

Troisième cas. — E est nul. Alors on a

$$f(x + \gamma[f(x)]) - f(x) < \delta(x) \qquad \text{pour} \quad x \geq 0.$$

IV. — Démonstration du théorème 2.

6. Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions a, b et c du théorème 2. Désignons par E l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles

$$f(x+\gamma|f(x)|) \quad f(x) \qquad \delta(x).$$

Distinguons trois cas suivant que E est non borné, ou borné, ou nul.

Premier cas. — E est non borné. Alors E et $X(x)=x+\gamma|f(x)|$ rentrent dans le cas A du lemme 2. Donc il existe une suite infinie de points de E: $c_n (n \geq 0)$ telle que :

1° $X(c_n) \leq c_{n+1}$ pour $n \geq 0$;
2° chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n \leq x < X(c_n) (n \geq 0)$.

Nous allons démontrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{c_n}^{X(c_n)} \delta(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \gamma(t)\,dt. \tag{6}$$

Posons $d_n = X(c_n)$. $\delta(x)$ et $\gamma(t)$ étant non croissantes, on a

$$\int_{c_n}^{d_n} \delta(x)\,dx \leq \delta(c_n)(d_n - c_n) = \delta(c_n)\gamma|f(c_n)|, \tag{7}$$

$$\int_{f(d_n)}^{f(c_n)} \gamma(t)\,dt \geq \gamma|f(c_n)|\,|f(c_n) - f(d_n)|. \tag{8}$$

Mais c_n est un point de E; on a

$$\delta(c_n) \geq |f(c_n) - f(d_n)|. \tag{9}$$

En tenant compte du fait que $\gamma(t)$ est positive, on tire de (7), (8), (9), l'inégalité suivante

$$\int_{c_n}^{d_n} \delta(x)\,dx \leq \int_{f(d_n)}^{f(c_n)} \gamma(t)\,dt.$$

D'où, moyennant 1° et la non-croissance de $f(x)$, on trouve que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{c_n}^{d_n} \delta(x)\,dx \leq \int_0^{f(c_0)} \gamma(t)\,dt,$$

ce qui donne l'inégalité (6).

Deuxième cas. — E est borné. Alors E et $X(x) = x + \gamma[f(x)]$ rentrent dans le cas B du lemme 2. Donc il existe une suite finie de points de E: $c_n (0 \leq n \leq k)$ telle que :

1° $X(c_n) \leq c_{n+1}$ pour $0 \leq n \leq k-1$;

2° chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n \quad x < X(c_n) (0 \leq n \leq k)$.

Comme dans le cas précédent, on démontre que

$$\sum_{n=0}^{k} \int_{c_n}^{X(c_n)} \delta(x)\, dx < \int_0^1 \gamma(t)\, dt.$$

Troisième cas. — E est nul. Alors on a

$$f(x + \gamma[f(x)]) - f(x) > -\delta(x) \qquad \text{pour} \quad x \geq 0.$$

V. — Une conséquence du théorème 1.

7. Considérons une fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $f(x)$ est continue pour $x \geq 0$;

2° Sur chaque segment situé dans l'intervalle $x \quad 0$, $f(x)$ est à variation bornée.

Désignons par $V(x_1, x_2; f)$ la variation totale de $f(x)$ sur le segment $x_1 \leq x \leq x_2 (0 \leq x_1 < x_2)$ et posons

$$W(x; f) = V(0, x; f) \qquad \text{pour} \quad x > 0, \qquad W(0; f) = 0.$$

On peut démontrer que (1) :

$W(x; f)$ est continue et non décroissante pour $x \geq 0$; $W(x; f) \geq 0$ pour $x \geq 0$;

$V(x_1, x_2; f) = W(x_2; f) - W(x_1; f)$ pour $0 \leq x_1 < x_2$.

Donc le théorème 1 fournit cette conséquence :

THÉORÈME 3. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions satisfaisant aux conditions suivantes :*

$f(x)$ satisfait aux conditions 1° et 2°;

$\gamma(t)$ et $\delta(x)$ satisfont aux conditions (b) et (c) dans le théorème 1. Alors on a

$$V(x, x + \gamma[W(x; f)]; f) < \delta(x),$$

sauf au plus dans une suite d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\int_0^x \delta(x)\, dx$ ne dépasse pas $\delta(0)\gamma(0) + \int_0^x \gamma(t)\, dt$.

(1) *Voir* É. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. 1, 2e édit., Chap. I.

DEUXIÈME PARTIE.

Deuxième propriété générale des fonctions continues monotones.

I. — Définitions.

1. *Définition* 1. — Soient $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes :

α. $\gamma(t)$ est positive, continue et non croissante pour $t \geq 0$ et est telle que $\int_0^{+\infty} \gamma(t)\,dt$ converge.

β. $\delta(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geq 0$ et est telle que $\int_0^{+\infty} \delta(x)\,dx$ diverge.

Une fonction $f(x)$ est, par définition, une fonction-type par rapport à $\gamma(t)$ et $\delta(x)$, si $f(x)$ satisfait aux conditions suivantes :

1° $f(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geq 0$ et tend vers l'infini avec x;

2° $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$;

3° $f(x + \gamma[f(x)]) - f(x) < \delta(x)$ pour $x \geq 0$.

2. *Définition* 2. — Soient $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes :

α. $\gamma(t)$ est positive, continue et non croissante pour $0 < t \leq 1$ et est telle que $\int_0^{1} \gamma(t)\,dt$ converge.

β. $\delta(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geq 0$ et est telle que $\int_0^{+\infty} \delta(x)\,dx$ diverge.

Une fonction $f(x)$ est par définition une fonction-type par rapport à $\gamma(t)$ et $\delta(x)$, si $f(x)$ satisfait aux conditions suivantes :

1° $f(x)$ est continue et non croissante pour $x \geq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

2° $0 < f(x) \leq 1$ pour $x \geq 0$.

3° $f(x + \gamma[f(x)]) - f(x) > -\delta(x)$ pour $x \geq 0$.

3. *Définition* 3. — Soit $f(x)$ une fonction définie pour $x \geq 0$. Une fonction $g(x)$ définie pour $x \geq 0$ est par définition supérieurement adjointe à $f(x)$, si $f(x) < g(x)$ à partir d'une valeur de x et si $f(x) = g(x)$ pour une suite de

valeurs de x tendant vers l'infini. Une fonction $g(x)$ définie pour $x \geq 0$ est par définition inférieurement adjointe à $f(x)$, si $f(x) \geq g(x)$ à partir d'une valeur de x et si $f(x) = g(x)$ pour une suite de valeurs de x tendant vers l'infini.

II. — Théorèmes fondamentaux.

4. Théorème 1. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

$f(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geq 0$ et tend vers l'infini avec x;
$\gamma(t)$ et $\delta(x)$ vérifient les conditions (α) et (β) dans la définition 1.

Alors il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont fonctions-types par rapport à $\gamma(t)$ et $\delta(x)$;*
2° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont respectivement supérieurement et inférieurement adjointes à $f(x)$.*

5. Théorème 2. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

$f(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$;
$\gamma(t)$ et $\delta(x)$ vérifient les conditions (α) et (β) dans la définition 2.

Alors il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions-types par rapport à $\gamma(t)$ et $\delta(x)$;*
2° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont respectivement supérieurement et inférieurement adjointes à $f(x)$.*

III. — Lemmes de base.

6. Lemme 1. — *Soit $u_n (n \geq 1)$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. Alors il existe une suite croissante d'entiers positifs $n_k (k \geq 1)$ telle que la suite $U_k = u_{n_k}$ soit décroissante.*

n étant un entier positif, soit $N = N(n)$ le plus petit entier positif tel que

$$N \geq n, \quad u_N < u_n.$$

Alors la suite d'entiers positifs

$$n_1 = 1, \qquad n_2 = N(n_1), \qquad n_3 = N(n_2), \qquad \ldots, \qquad n_k = N(n_{k-1}), \qquad \ldots$$

possède les propriétés exigées.

7. Lemme 2. — *Soit $f(x)$ une fonction positive, continue et non croissante pour $x \geq 0$ et tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Alors il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés suivantes :*

1° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont positives, continues et non croissantes pour $x \geq 0$ et tendent vers zéro avec $\frac{1}{x}$.*

2° *$f_1(x)$ admet une dérivée droite $f'_1(x) > -1$ pour $x \geq 0$. $f_2(x)$ admet une dérivée droite $f'_2(x) > -1$ pour $x \geq 0$;*

3° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont respectivement supérieurement et inférieurement adjointes à $f(x)$;*

4° *$f_1(x) \leq f(0)$ pour $x \geq 0$. $f_2(x) \leq f(0)$ pour $x \geq 0$.*

Pour l'établir, nous distinguons deux cas :

Premier cas. — On a $f(0) < \frac{1}{2}$.

Second cas. — On a $f(0) \geq \frac{1}{2}$.

Examen du premier cas.

Soit $y = f(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions du lemme 2 et telle que $f(0) < \frac{1}{2}$. Considérons sa courbe représentative C et la suite de droites parallèles

$$D_n, \qquad y = -\frac{1}{2}(x - n) \qquad (n \geq 1).$$

La courbe C coupe la droite D_n en des points p dont les abscisses sont toutes comprises entre $n-1$ et n. Des points p, soit $p_n(a_n, b_n)$ celui dont l'abscisse est minimum et soit $q_n(c_n, d_n)$ celui dont l'abscisse est maximum. Alors évidemment la courbe C est au-dessous de la droite D_n pour $0 \leq x < a_n$ et au-dessus de la droite D_n pour $x > c_n$.

Construction de la fonction $f_1(x)$. — Considérons la suite de points $p_n(a_n, b_n)$ $(n \geq 1)$. La suite b_n est positive, non croissante et tend vers zéro. Donc d'après le lemme 1, il existe une suite croissante d'entiers positifs $n_k (k \geq 1)$ telle que la suite b_{n_k} soit décroissante.

Considérons la suite de droites D_{n_k} et la suite de points p_{n_k}. A chaque point p_{n_k}, associons le point p'_k de la droite $D_{n_{k-1}}$ dont l'ordonnée est égale à celle de p_{n_k}. Sur l'axe des y, marquons le point p'_0 dont l'ordonnée est égale à celle du point p_{n_1}.

Considérons la suite de points

$$(S_1) \qquad p'_0, \ p_{n_1}, \ p'_1, \ p_{n_2}, \ p'_2, \ \ldots, \ p_{n_k}, \ p'_k, \ \ldots.$$

Soit L_1 la ligne polygonale dont les sommets sont la suite de points (S_1). Soit $y = f_1(x)$ la fonction définie pour $x \geq 0$ et représentée par la ligne L_1.

Construction de la fonction $f_2(x)$ — Considérons la suite de points

$$q_n(c_n, d_n) \qquad (n \geq 1).$$

La suite d_n est positive, non croissante et tend vers zéro. Donc d'après le lemme 1, il existe une suite croissante d'entiers positifs m_k $(k \geq 1)$ telle que la suite d_{m_k} soit décroissante.

Considérons la suite de droites D_{m_k} et la suite de points q_{m_k}. A chaque point q_{m_k}, associons le point q'_k de la droite D_{m_k} dont l'ordonnée est égale à celle du point $q_{m_{k-1}}$. Sur l'axe des y, marquons le point q'_0 dont l'ordonnée est égale à celle du point q_{m_1}.

Considérons la suite de points

$$(S_2) \qquad q'_0, \quad q_{m_1}, \quad q'_1, \quad q_{m_2}, \quad q'_2, \quad \ldots, \quad q_{m_k}, \quad q'_k, \quad \ldots$$

Soit L_2 la ligne polygonale dont les sommets sont la suite de points (S_2). Soit $y = f_2(x)$ la fonction définie pour $x \geq 0$ et représentée par la ligne L_2.

On voit aisément que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissent des propriétés énoncées dans le lemme 2.

Examen du second cas.

Soit $f(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions du lemme 2 et telle que $f(0) = \frac{1}{2}$. N étant le premier entier positif tel que $f(N) < \frac{1}{2}$, considérons la fonction $g(x)$ définie pour $x \geq 0$ de la manière suivante

$$g(x) = f(N) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq x < N,$$
$$g(x) = f(x) \qquad \text{pour} \quad x \geq N.$$

La fonction $g(x)$ satisfait aussi aux conditions du lemme 2, mais on a $g(0) < \frac{1}{2}$. Le cas présent est alors ramené au cas précédent. Soient donc $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les fonctions correspondant à la fonction $g(x)$. Alors les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissent des propriétés exigées.

IV. Démonstration du théorème 1.

8. Lemme 3. — *Soit $\gamma(t)$ une fonction positive, continue et non croissante pour $t \geq 0$, telle que $\int_0^\infty \gamma(t)\,dt$ converge. Alors il existe une fonction $h(\xi)$ définie dans un intervalle fini $0 \leq \xi < A$ vérifiant les conditions suivantes :*

1° *$h(\xi)$ est convexe et croissante pour $0 \leq \xi < A$;*

2° $h(0)=0$ *et* $\lim_{\xi>A} h(\xi)=\infty$;

3° $0<\xi+\gamma[h(\xi)]<A$ *pour* $0\leq\xi<A$:

4° $h'(\xi)$ *étant la dérivée droite de* $h(\xi)$, *on a*

$$\gamma[h(\xi)]h'(\xi+\gamma[h(\xi)])\leq 1 \qquad \text{pour} \quad 0\leq\xi<A.$$

Ce lemme, sous une forme différente, a été donné par M. Valiron (*loc. cit.*). Pour l'établir, considérons le nombre positif

$$A=\gamma(0)+\sum_{m=0}^{\infty}\gamma(m),$$

et la suite croissante de nombres $a_n(n\geq 0)$ définie de la manière suivante

$$a_0=0, \qquad a_1=\gamma(0),$$

$$a_n=\gamma(0)+\sum_{m=0}^{n-2}\gamma(m), \qquad n\geq 2.$$

Évidemment a_n tend vers A.

Soit $\eta=h(\xi)$ la fonction définie dans l'intervalle $0\leq\xi<A$ et représentée par la ligne polygonale dont les sommets sont la suite de points

$$p_n, \qquad \xi_n=a_n, \qquad \eta_n=n \qquad (n\geq 0).$$

Le côté p_np_{n+1} de cette ligne polygonale a pour pente $\frac{1}{(a_{n+1}-a_n)}$ qui ne décroît pas lorsque n croît, car on a

$$\frac{1}{a_1-a_0}=\frac{1}{\gamma(0)}, \qquad \frac{1}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{\gamma(n-1)} \qquad (n\geq 1).$$

Il est clair que la fonction $h(\xi)$ vérifie les conditions 1° et 2°.

ξ étant une valeur de l'intervalle $0\leq\xi<A$, soit n l'entier tel que $a_n\leq\xi<a_{n+1}$. Alors on a

$$\xi+\gamma[h(\xi)]<a_{n+1}+\gamma[h(a_n)]=a_{n+1}+\gamma(n)=a_{n+2}.$$

Par suite

$$h'(\xi+\gamma[h(\xi)])\leq\frac{1}{a_{n+2}-a_{n+1}}=\frac{1}{\gamma(n)}=\frac{1}{\gamma[h(a_n)]}\leq\frac{1}{\gamma[h(\xi)]}.$$

Donc la fonction $h(\xi)$ vérifie les conditions 3° et 4°.

9. Considérons trois fonctions $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ vérifiant les conditions du théorème I. Nous nous proposons de démontrer qu'il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés 1° et 2° énoncées dans le même théorème. Dans la démonstration suivante, nous supposerons que la fonction $f(x)$ vérifie la condition $f(0)>0$. Cette condition ne restreint la généralité qu'en apparence.

Cela posé, considérons la fonction $\eta = h(\xi)\ (0 \leq \xi < A)$, fournie par le lemme 3, correspondant à la fonction $\gamma(t)$. Soit $\xi = \lambda(\eta)\ (\eta \geq 0)$ sa fonction inverse. m étant le plus grand des nombres $\delta(0)$ et 1, considérons la fonction

$$y = k(x) = \frac{1}{m}\int_0^x \delta(x)\,dx \qquad (x \geq 0).$$

Soit $x = \mu(y)\ (y \geq 0)$ sa fonction inverse.

Considérons la fonction

$$\varphi(y) = A - \lambda\{f[\mu(y)]\}$$

qui est positive, continue et non croissante pour $y \geq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{y}$.

Soient $\varphi_1(y)$ et $\varphi_2(y)$ les fonctions, fournies par le lemme 2, correspondant à la fonction $\varphi(y)$.

Alors les fonctions

$$f_1(x) = h\{A - \varphi_2[k(x)]\}, \qquad f_2(x) = h\{A - \varphi_1[k(x)]\}$$

jouissent des propriétés exigées.

Pour l'établir, nous nous bornons à démontrer que la fonction $f_1(x)$ jouit des propriétés suivantes :

1° $f_1(x)$ est une fonction-type par rapport aux fonctions $\gamma(t)$ et $\delta(x)$;
2° $f_1(x)$ est supérieurement adjointe à la fonction $f(x)$.

Démonstration de la propriété 1°.

La fonction $f_1(x)$ s'écrit

$$f_1(x) = h\{\Psi_2(x)\},$$

en posant

$$\Psi_2(x) = A - \varphi_2[k(x)],$$

$f_1(x)$ est définie pour $x \geq 0$.

Car on a

$$0 < \varphi_2(y) \leq \varphi(0) < A$$

et donc

$$0 < \Psi_2(x) < A.$$

$f_1(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geq 0$ et tend vers l'infini avec x.

Nous omettons la démonstration.

$f_1(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.

C'est évident.

$f_1(x)$ vérifie l'inégalité

$$f_1(x + \gamma[f_1(x)]) - f_1(x) < \delta(x) \qquad \text{pour} \quad x \quad 0.$$

En effet, $f_1(x)$ admet une dérivée droite

$$f'_1(x) = h'\{\Psi_2(x)\}\,\Psi'_2(x),$$

où

$$\Psi'_2(x) \geq 1, \qquad \Psi'_2(x) < \delta(x),$$
$$\gamma[f_1(x)]\,h'\{\Psi_2(x) + \gamma[f_1(x)]\} < 1.$$

Démontrons le fait suivant. Quelle que soit la valeur $a \geq 0$, on a

$$(1) \qquad f_1(x) < \frac{\delta(a)}{\gamma[f_1(a)]} \qquad \text{pour} \quad a \leq x < a + \gamma[f_1(a)].$$

En effet, considérons deux valeurs x et a assujetties à la condition

$$a \geq 0, \qquad a \leq x < b = a + \gamma[f_1(a)].$$

Alors, d'une part, on a

$$\Psi_2(x) \leq \Psi_2(b) < \Psi_2(a) + \gamma[f_1(a)],$$
$$h'\{\Psi_2(x)\} \geq h'\{\Psi_2(a) + \gamma[f_1(a)]\} \geq \frac{1}{\gamma[f_1(a)]};$$

d'autre part, on a

$$\Psi'_2(x) < \delta(x) \leq \delta(a).$$

Donc

$$f'_1(x) < \frac{\delta(a)}{\gamma[f_1(a)]}.$$

L'inégalité (1) et la continuité de la fonction $f_1(x)$ entraînent l'inégalité

$$f_1\big(a + \gamma[f_1(a)]\big) - f_1(a) < \delta(a).$$

Démonstration de la propriété 2°.

La fonction $\varphi_2(y)$ étant inférieurement adjointe à la fonction

$$\varphi(y) = A - \lambda\{f[\mu(y)]\},$$

on a

$$(2) \qquad \varphi(y) \geq \varphi_2(y),$$

à partir d'une valeur Y de y, et l'on a

$$(3) \qquad \varphi(y) = \varphi_2(y)$$

pour une suite de valeurs y_n de y tendant vers l'infini.

De l'inégalité (2), il s'ensuit que

$$h\{A - \varphi_2(y)\} \geq f[\mu(y)] \qquad \text{pour} \quad y \geq Y.$$

Posons $X = \mu(Y)$, alors on a

$$h\{A - \varphi_2[k(x)]\} \geq f(x) \qquad \text{pour} \quad x \geq X.$$

Donc $f(x) \leq f_1(x)$ à partir d'une valeur de x.

De l'égalité (3), il s'ensuit que

$$h\{\Lambda - \varphi_2(y)\} = f[\mu(y)] \qquad \text{pour } y = y_n.$$

Posons $x_n = \mu(y_n)$, alors on a

$$h\{\Lambda - \varphi_2[k(x)]\} = f(x) \qquad \text{pour } x = x_n.$$

Donc $f(x) = f_1(x)$ pour une suite de valeurs de x tendant vers l'infini.

V. — Démonstration du théorème 2.

10. Considérons trois fonctions $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ vérifiant les conditions du théorème 2. Nous nous proposons de démontrer qu'il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés 1° et 2° énoncées dans le même théorème. Dans la démonstration suivante, nous supposerons que la fonction $f(x)$ vérifie la condition $f(0) = 1$. Cette condition ne restreint la généralité qu'en apparence.

Cela posé, considérons la fonction

$$\xi = \lambda(\eta) = \int_{\eta}^{1} \gamma(t)\,dt \qquad (0 < \eta \leq 1).$$

Soit

$$\eta = h(\xi) \quad (0 \leq \xi < \Lambda), \qquad \Lambda = \int_{0}^{1} \gamma(t)\,dt$$

sa fonction inverse. Considérons la fonction

$$y = k(x) = \int_{0}^{x} \delta(x)\,dx \qquad (x \geq 0).$$

Soit $x = \mu(y)$ $(y \geq 0)$ sa fonction inverse.

Considérons la fonction

$$\varphi(y) = \Lambda - \lambda\{f[\mu(y)]\}$$

qui est positive, continue et non croissante pour $y \geq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{y}$.

Soient $\varphi_1(y)$ et $\varphi_2(y)$ les fonctions, fournies par le lemme 2, correspondant à la fonction $\varphi(y)$.

Alors les fonctions

$$f_1(x) = h\{\Lambda - \varphi_1[k(x)]\}, \qquad f_2(x) = h\{\Lambda - \varphi_2[k(x)]\}$$

jouissent des propriétés exigées.

Pour l'établir, nous nous bornons à démontrer que la fonction $f_1(x)$ jouit des propriétés suivantes :

1° $f_1(x)$ est une fonction-type par rapport aux fonctions $\gamma(t)$ et $\delta(x)$;

2° $f_1(x)$ est supérieurement adjointe à la fonction $f(x)$.

Démonstration de la propriété 1°.

La fonction $f_1(x)$ s'écrit

$$f_1(x) = h\{\Psi_1(x)\}$$

en posant

$$\Psi_1(x) = A - \varphi_1[k(x)].$$

$f_1(x)$ est définie pour $x \geq 0$.

Car on a

$$0 < \varphi_1(y) \leq \varphi(0) \leq A$$

et donc

$$0 \leq \Psi_1(x) < A.$$

$f_1(x)$ est continue et non croissante pour $x \geq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

Nous omettons la démonstration.

$0 < f_1(x) \leq 1$ pour $x \geq 0$.

C'est évident.

$f_1(x)$ vérifie l'inégalité

$$f_1\big(x + \gamma[f_1(x)]\big) - f_1(x) > -\delta(x) \qquad \textit{pour} \quad x \geq 0.$$

En effet, $f_1(x)$ admet une dérivée droite

$$f_1'(x) = h'\{\Psi_1(x)\}\Psi_1'(x),$$

où

$$h'\{\Psi_1(x)\} = -\frac{1}{\gamma[f_1(x)]},$$

$$\Psi_1'(x) < \delta(x).$$

Démontrons le fait suivant. Quelle que soit la valeur $a \geq 0$, on a

$$f_1(x) > -\frac{\delta(a)}{\gamma[f_1(a)]} \qquad \text{pour} \quad x \geq a. \tag{4}$$

En effet, considérons deux valeurs x et a assujetties à la condition

$$a \geq 0, \qquad x \geq a.$$

Alors, d'une part, on a

$$h'\{\Psi_1(x)\} = -\frac{1}{\gamma[f_1(x)]} > -\frac{1}{\gamma[f_1(a)]};$$

d'autre part, on a

$$\Psi_1'(x) < \delta(x) < \delta(a).$$

Donc

$$f_1'(x) > -\frac{\delta(a)}{\gamma[f_1(a)]}.$$

L'inégalité (4) et la continuité de la fonction $f_1(x)$ entraînent l'inégalité

$$f_1\big(a + \gamma[f_1(a)]\big) - f_1(a) > -\delta(a).$$

Démonstration de la propriété 2°.

La fonction $\varphi_1(y)$ étant supérieurement adjointe à la fonction

$$\varphi(y) = A - \lambda\{f[\mu(y)]\},$$

on a

$$\varphi(y) \leq \varphi_1(y) \tag{5}$$

à partir d'une valeur Y de y, et l'on a

$$\varphi(y) = \varphi_1(y) \tag{6}$$

pour une suite de valeurs y_n de y tendant vers l'infini.

De l'inégalité (5), il s'ensuit que

$$h\{A - \varphi_1(y)\} \geq f[\mu(y)] \qquad \text{pour} \quad y \geq Y.$$

Posons $X = \mu(Y)$, alors on a

$$h\{A - \varphi_1[k(x)]\} \geq f(x) \qquad \text{pour} \quad x \geq X.$$

Donc $f(x) \leq f_1(x)$ à partir d'une valeur de x.

De l'égalité (6), il s'ensuit que

$$h\{A - \varphi_1(y)\} = f[\mu(y)] \qquad \text{pour} \quad y = y_n.$$

Posons $x_n = \mu(y_n)$, alors on a

$$h\{A - \varphi_1[k(x)]\} = f(x) \qquad \text{pour} \quad x = x_n.$$

Donc $f(x) = f_1(x)$ pour une suite de valeurs de x tendant vers l'infini.

Une conséquence du théorème 1.

11. Considérons une fonction $f(x)$ continue pour $x \geq 0$ et telle que $\overline{\lim_{x \to \infty}} f(x) = \infty$. Soit $\bar{f}(x)$ la fonction définie pour $x \geq 0$ de la manière suivante

$$\bar{f}(x) = \text{maximum de } f(x') \qquad \text{pour} \quad 0 \leq x' \leq x.$$

On peut démontrer que (¹) :

$\bar{f}(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geq 0$ et tend vers l'infini avec x;

Toute fonction $F(x)$ qui est non décroissante pour $x \geq 0$ et supérieurement adjointe à $f(x)$, est supérieurement adjointe à la fonction $\bar{f}(x)$.

(¹) *Voir* BLUMENTHAL, *loc. cit.*

Donc le théorème 1 fournit cette conséquence :

THÉORÈME 3. — *Soient* $f(x)$, $\gamma(t)$ *et* $\delta(x)$ *trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

$f(x)$ *est continue pour* $x \geq 0$ *et telle que* $\overline{\lim}_{x \to \infty} f(x) = \infty$;

$\gamma(t)$ *et* $\delta(x)$ *vérifient les conditions* α *et* β *dans la définition* 1.

Alors il existe une fonction $F(x)$ *jouissant des propriétés suivantes :*

1° $F(x)$ *est une fonction-type par rapport à* $\gamma(t)$ *et* $\delta(x)$;
2° $F(x)$ *est supérieurement adjointe à* $f(x)$.

Remarque. — Dans les deux parties qui précèdent, nous avons établi deux propriétés générales des fonctions $f(x)$ continues monotones pour $x \geq 0$. Ces deux propriétés générales peuvent certainement s'étendre à la classe plus large des fonctions $f(x)$ monotones pour $x \geq 0$. Nous reviendrons à cette question.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE

LIÉES

AU CARACTÈRE INVARIANT DE CERTAINS RÉSEAUX

PAR

DÉFORMATION ARBITRAIRE DE LEUR SURFACE SUPPORT

PAR M. PAUL VINCENSINI.

Introduction.

L'étude de la déformation des congruences de sphères par déformation de leur déférente conduit à associer, à toute congruence de sphères (Σ) admettant pour déférente une surface donnée S, deux réseaux (ω) et (ω') de S invariants au cours d'une déformation arbitraire de la déférente.

La sphère $\Sigma(u, v)$ centrée au point $P(u, v)$ de S, touche son enveloppe en deux points M et M', symétriques par rapport au plan tangent en P à S, et conservant sur Σ des positions invariables lorsque S se déforme en entraînant les sphères (Σ). Les droites $D \equiv (MM')$ relatives aux différents points P de S forment une congruence (D) [congruence des cordes de contact] dont les différents rayons, et par suite les points I (milieux des segments MM') où ces rayons percent les plans tangents correspondants, sont invariablement liés aux éléments de contact correspondants de S. Les plans tangents à Σ en M et M' se coupent suivant une droite Δ située dans le plan tangent en P à S, et l'ensemble des droites Δ constitue une nouvelle congruence (Δ) [congruence des polaires des cordes de contact] dont les rayons, comme ceux de (D), restent invariablement liés aux plans tangents correspondants de S au cours d'une déformation arbitraire de S.

On sait (Ribaucour) que les courbes de S qui correspondent aux développables des deux congruences précédentes, ont leurs tangentes perpendiculaires aux plans tangents correspondants de ces développables, et forment sur S deux réseaux conjugués. Au cours d'une déformation quelconque de S les deux réseaux précédents varient sur S, mais M. J. Drach a montré (1) que chacun d'eux ne cesse de partager harmoniquement un réseau invariant de S au cours d'une déformation arbitraire de cette surface. Ces deux derniers réseaux sont les réseaux invariants $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ de S associés à la congruence de sphère (Σ) dont il a été question plus haut. Ils peuvent être, l'un et l'autre, caractérisés par une propriété géométrique remarquable.

Réseau $(\mathcal{D})$. — En cherchant les courbes sur lesquelles doit se déplacer P sur S, pour que le déplacement infinitésimal de P soit constamment orthogonal au déplacement infinitésimal du point I (projection de P sur D) correspondant, on trouve deux familles de telles courbes dont l'ensemble forme un réseau. Ces deux familles *restent les mêmes* (sur S) lorsque S se déforme arbitrairement, et le réseau qu'elles constituent est le réseau invariant $(\mathcal{D})$.

Réseau $(\mathcal{D}')$. — Désignons par I' le point où la droite PI (perpendiculaire menée de P sur Δ coupe Δ). Faisons décrire à P une courbe C sur S, et soit T le point où la tangente en un point quelconque P de C coupe la droite Δ située dans le plan tangent en P à S. Il existe deux familles de courbes C sur S telles que, lorsque P se déplace sur l'une quelconque de ces courbes, le déplacement infinitésimal de T soit constamment orthogonal à la droite PI' correspondante. Ces deux familles de courbes constituent le réseau invariant $(\mathcal{D}')$.

Dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale* (2), j'ai étudié en détail les propriétés des réseaux $(\mathcal{D}')$: leur considération permet d'approfondir l'étude de la déformation d'une surface quelconque ou de types déterminés de surfaces particulières. Je me propose de faire ici une étude analogue pour les réseaux $(\mathcal{D})$.

J'introduis les réseaux $(\mathcal{D})$ comme cas particuliers de réseaux plus généraux [*réseaux* $(\mathcal{D})$ *généralisés* du n° 1] que j'ai signalés dans une Note récente des *Comptes rendus* (3). Comme on le verra, l'introduction de ces réseaux met en évidence un ensemble assez inattendu de liens, reliant entre elles la plupart des questions qui, à des titres divers, ont joué un rôle important dans le développement de la géométrie différentielle des surfaces.

---

(1) J. Drach, *Sur les surfaces enveloppes de sphères et la déformation des surfaces* [*C. R. Cong. Soc. Sav.*, 1925 (Sciences)],

(2) P. Vincensini, *Recherches sur la déformation des surfaces* [*Ann. Éc. Norm.* (3), t. XIII, p. 255].

(3) P. Vincensini, *Sur une propriété relative à la déformation des surfaces* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 224, p. 520-522).

I. — Les réseaux (ω) généralisés.

Posons-nous, pour commencer, le problème suivant :

Soit S une surface quelconque. Dans le plan tangent en l'un quelconque P de ses points choisissons *arbitrairement* un point I, et supposons que les différents points I restent fixés dans les plans tangents correspondants lorsque ceux-ci sont entraînés dans une déformation arbitraire de S.

Quelles sont, dans ces conditions, les courbes que doit décrire P sur S, *pour que les déplacements infinitésimaux correspondants de* P *et du point* I *associé soient constamment orthogonaux et restent orthogonaux au cours d'une déformation arbitraire de* S ?

Si les points I sont les pieds des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées sur S, il existe sur S deux familles de courbes répondant à la question : elles forment le réseau invariant (ω) défini dans l'Introduction.

Nous allons voir que le résultat *subsiste* pour un choix *arbitraire* du point I en démontrant que :

Quelle que soit la distribution des points I *dans les divers plans tangents de* S *il existe, à une exception remarquable près, deux familles de courbes sur* S *donnant lieu à la correspondance par éléments linéaires orthogonaux invariante indiquée.*

Supposons S rapportée à un système orthogonal (u, v) choisi de telle façon que le point I associé au point P soit sur la tangente en P à la courbe $v = \text{const.}$, et posons $\overline{\text{PI}} = a(u, v)$.

(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) étant respectivement les cosinus directeurs des tangentes aux courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, et de la normale en $P(u, v)$ à S, on a

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}}X_3, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E}}X_3,\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}X_1 + \frac{D'}{\sqrt{G}}X_3, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}}X_3,\\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{D}{\sqrt{E}}X_1 - \frac{D'}{\sqrt{G}}X_2, \qquad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{D'}{\sqrt{E}}X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}}X_2,
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

D, D′, D″ étant les coefficients de la deuxième forme fondamentale de S.

Les coordonnées du point I sont

$$\xi = x + aX_1, \qquad \eta = y + aY_1, \qquad \zeta = z + aZ_1, \tag{3}$$

x, y, z étant les coordonnées de P.

Définissons un déplacement infinitésimal de P sur S par la relation

$$\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}, \tag{4}$$

A et B étant deux fonctions des variables indépendantes u et v.

Les paramètres directeurs de la direction de ce déplacement infinitésimal sont

$$\begin{cases} \lambda = A\sqrt{E}\,X_1 + B\sqrt{G}\,X_2, \\ \mu = A\sqrt{E}\,Y_1 + B\sqrt{G}\,Y_2, \\ \nu = A\sqrt{E}\,Z_1 + B\sqrt{G}\,Z_2, \end{cases} \tag{5}$$

et la condition d'orthogonalité des déplacements infinitésimaux simultanés des points P et I est

$$\lambda\, d\xi + \mu\, d\eta + \nu\, d\zeta = 0. \tag{6}$$

(6) développée en tenant compte des relations (5), (3) et (2) s'écrit

$$\sqrt{E}\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)A^2 + \left(\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v} - a\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)AB + \sqrt{G}\left(\sqrt{G} + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)B^2 = 0.$$

Pour une surface S donnée et pour un choix déterminé des points I (E, G, a fonctions connues de u et v), l'équation précédente, du second degré en $\frac{B}{A}$, définit (le cas d'indétermination, qui sera étudié plus loin, étant excepté) un réseau d'équation quadratique

$$\sqrt{E}\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)du^2 + \left(\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v} - a\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)du\,dv + \sqrt{G}\left(\sqrt{G} + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)dv^2 = 0, \tag{7}$$

le long des courbes duquel les déplacements de P sont orthogonaux aux déplacements correspondants de I.

Les coefficients de (7) sont indépendants de D, D', D''; il en résulte que :

Le réseau d'une surface quelconque S, *dont les deux familles de courbes portent les déplacements orthogonaux aux déplacements correspondants de* I, *reste invariant lorsqu'on soumet* S *à une déformation arbitraire.*

Il y a lieu de faire la remarque suivante :

S étant une surface quelconque, lions invariablement au plan tangent en l'un quelconque P de ses points un point I choisi d'après une loi arbitraire (I n'est donc plus nécessairement dans le plan tangent). Dans la correspondance établie par les points P et I entre la surface S et la surface $\overline{S}$ lieu des points I, il existe un couple de réseaux homologues se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires infinitésimaux. L'équation définissant ces réseaux est, comme on le constate aussitôt, l'équation (7), où a se rapporterait à la projec-

tion de I sur le plan tangent, et au premier membre de laquelle on ajouterait une quantité proportionnelle à la deuxième forme fondamentale de S [$-b(\mathrm{D}\,du^2+2\mathrm{D}'\,du\,dv+\mathrm{D}''\,dv^2)$, où b représente la distance de chaque point I au plan tangent correspondant de S].

La forme de la nouvelle équation montre que, sauf si $b=0$, c'est-à-dire si les différents points I de $\overline{\mathrm{S}}$ sont dans les plans tangents correspondants de S, la correspondance entre les deux réseaux associés cesse d'être par orthogonalité des éléments homologues si l'on soumet S à une déformation arbitraire.

Les *seuls* couples de réseaux associés donnant lieu à la permanence de l'orthogonalité des éléments linéaires homologues au cours d'une déformation arbitraire de S, sont donc *ceux pour lesquels chaque point* I *est dans le plan tangent au point correspondant* P *de* S *dont il a été question plus haut.*

II. — Réseaux ($\mathcal{D}$) généralisés spéciaux. Cas de réduction ou d'indétermination de l'équation (7).

La proposition qui fait l'objet du numéro précédent est susceptible d'applications variées. Nous allons ici en déduire quelques résultats suggérés par la forme même de l'équation (7) qui définit, sur une surface S quelconque, les réseaux (P) correspondant par orthogonalité des éléments linéaires à leurs associés (I).

En annulant le coefficient du terme en du^2 au premier membre de (7), on exprime que les points I relatifs aux différents points P d'une même courbe $v=$ const. sont situés sur une développante de cette courbe; l'orthogonalité des éléments linéaires correspondants sur les deux courbes est bien connue.

Annulons le coefficient du terme en dv^2. Nous obtenons ainsi les segments $\overline{\mathrm{PI}}=a$ qu'il faut porter sur les normales aux différentes courbes $u=$ const. de S pour que, lorsque P décrit l'une de ces courbes, le point I correspondant décrive une courbe correspondant à la précédente avec orthogonalité des éléments linéaires.

Les différents segments $\overline{\mathrm{PI}}$ sont définis par

$$\overline{\mathrm{PI}}=a=-\frac{\sqrt{\mathrm{EG}}}{\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}}.$$

L'expression de a est celle du rayon de courbure géodésique de la courbe $u=$ const. en P, et I est le centre de courbure géodésique correspondant. Nous sommes conduits à la propriété suivante laquelle *lorsqu'un point* P *décrit une courbe quelconque* C *d'une surface quelconque* S, *les directions des déplacements du point* P *et du centre de courbure géodésique correspondant* I *sont constamment orthogonales.*

On déduit aussitôt de là la propriété suivante (¹) de la surface réglée (PI) engendrée par les normales PI à la courbe C tangentes à S :

Au centre de courbure géodésique I *relatif à un point quelconque* P *de* C, *le plan tangent à la surface réglée* (PI) *est normal au plan tangent en* P *à* S.

Le plan tangent en I à (PI) contient en effet, d'une part PI qui est orthogonale à la tangente en P à C, et d'autre part la direction du déplacement du point I qui est orthogonale à celle du déplacement du point P (donc à la tangente en P à C). La propriété énoncée résulte de cette double orthogonalité.

L'annulation du coefficient du terme en $du\,dv$ dans (7) fournit l'équation

$$\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v} - a\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

qui donne

$$a = U\sqrt{E} \qquad (U = \text{fonction arbitraire de } u).$$

Les points I définis par $\overline{PI} = a = U\sqrt{E}$ ont une signification géométrique intéressante (²) : ce sont les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les rayons des congruences des polaires des cordes de contact des enveloppes de sphères centrées sur S, ou, ce qui revient au même, des congruences (de Ribaucour) dont les rayons sont situés dans les plans tangents à S et dont les couples de foyers associés sont situés sur deux tangentes conjuguées de S.

La forme qu'affecte l'équation (7) dans le cas particulier envisagé montre que les congruences de Ribaucour ci-dessus définies jouissent de la propriété suivante :

Si I est le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque P d'une surface S sur le rayon d'une congruence quelconque de Ribaucour relative à S situé dans le plan tangent en P, et si l'on considère le réseau invariant de S dont les courbes portent les déplacements infinitésimaux orthogonaux aux déplacements correspondants de I, *ce réseau invariant est bissecté par la famille des courbes enveloppées sur* S *par les droites joignant les différents couples de points* P *et* I *associés* (*courbes* $v = \text{const.}$).

Exigeons maintenant que les coefficients des termes en du^2 et en dv^2 dans (7) soient simultanément nuls. Nous cherchons donc les réseaux invariants $[P(u, v)]$ *orthogonaux*, tels que le point décrivant le réseau (I) associé par orthogonalité des éléments linéaires à (P) *soit constamment situé sur la tangente à l'une des courbes* ($v = \text{const.}$) *du réseau* (P).

(¹) Cette propriété est due à Darboux, qui en a déduit diverses conséquences (*voir* le tome III de la *Théorie des surfaces*, p. 117).

(²) P. Vincensini, *Recherches sur la déformation des surfaces* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), LXIII, p. 255].

Le réseau (I) associé au réseau (P) est alors constitué, d'après ce qui précède, par une famille de développantes des courbes $v = \text{const.}$ du réseau (P), et par les courbes décrites par le centre de courbure géodésique d'une courbe $u = \text{const.}$ quelconque lorsque P décrit cette courbe.

Les surfaces S portant des réseaux invariants du type actuel sont des surfaces particulières que nous allons caractériser géométriquement. Les réseaux orthogonaux (u, v) jouissant des propriétés indiquées sont définis par le système

$$\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u} = 0,$$

$$\sqrt{EG} + a\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\sqrt{E} = -\frac{\partial a}{\partial u},$$

puis, portant cette expression de $\sqrt{E}$ dans la dernière équation :

$$\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

soit

$$\sqrt{G} = aV,$$

V étant une fonction arbitraire de v, que l'on peut réduire à l'unité moyennant un changement sur le paramètre v. On aura alors

$$E = \left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2, \qquad G = a^2,$$

et l'on voit que les surfaces S portant des réseaux invariants du genre qui nous occupe admettent l'élément linéaire *caractéristique*

$$ds^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2 du^2 + a^2\, dv^2, \tag{8}$$

où a (rayon de courbure géodésique des courbes $u = \text{const.}$) est une fonction arbitraire des deux variables u et v.

Ces surfaces sont susceptibles d'une définition géométrique intéressante. Imaginons, sur l'une d'elles, deux courbes $v = \text{const.}$ infiniment voisines quelconques. Elles définissent sur la surface une certaine zone infiniment étroite, dont la largeur, ε, en chaque point $P(u, v)$, est égale à l'élément de courbe $u = \text{const.}$, correspondant à la variation dv de v qui fait passer de l'une des courbes limitant la zone à l'autre ($\varepsilon = a\, dv$).

dv étant constant tout le long d'une zone, on voit que la largeur de la zone en l'un quelconque P de ses points est proportionnelle au rayon de courbure géodésique de la courbe $u = \text{const.}$ issue de P.

Les surfaces S envisagées jouissent donc de la propriété évidemment caractéristique (1) suivante :

On peut tracer sur elles un faisceau de courbes, telles que la largeur de toute zone infiniment étroite de la surface, définie par deux courbes infiniment voisines quelconques du faisceau, soit proportionnelle au rayon de courbure géodésique de la trajectoire orthogonale des courbes du faisceau au point où la largeur de la zone est considérée.

Si l'on remarque que la relation $\varepsilon = a\,dv$, différentiée par rapport à u, donne

$$d\varepsilon = \frac{\partial a}{\partial u}\,du\,dv = (ds)_u\,dv,$$

$(ds)_u$ désignant l'élément d'arc sur l'une des courbes limitant l'une quelconque des zones infiniment déliées dont il vient d'être question, on voit qu'on peut définir les surfaces actuelles, par la possibilité de tracer sur elles un faisceau de courbes telles que, pour toute zone infiniment déliée limitée par deux courbes du faisceau, *les variations infinitésimales de la largeur soient proportionnelles aux déplacements infinitésimaux correspondants sur les frontières.*

Surfaces de Guichard. — Parmi les surfaces que l'on vient de caractériser figurent évidemment les *surfaces de Guichard*, nappes focales des congruences (de Guichard) dont les deux réseaux focaux sont formés de lignes de courbure.

Si, en effet, P est un point quelconque d'une surface de Guichard (G) [1re nappe focale d'une congruence de Guichard], et si I est le point correspondant de la deuxième nappe focale (G′) de la congruence, lorsque P décrit l'une ou l'autre des deux lignes de courbure de (G) qui s'y croisent, I se déplace normalement au déplacement de P en décrivant l'une ou l'autre des deux lignes de courbure correspondantes de (G′).

Ceci montre que, conformément d'ailleurs à un résultat connu, l'élément linéaire de toute surface de Guichard rapportée à ses lignes de courbure peut être mis sous la forme (8), la fonction a ayant une valeur convenablement choisie.

Cas d'indétermination de l'équation (7). *Surfaces spirales.* — L'étude du cas où l'équation (7) est indéterminée, c'est-à-dire où le choix du point I peut être fait de façon que le réseau invariant correspondant de la surface S soit indéterminé, conduit à un autre type important de surfaces rentrant, comme les surfaces de Guichard, dans la famille générale précédemment caractérisée, à savoir les *surfaces spirales de Maurice Lévy et leurs déformées.*

(1) On voit aussitôt que tout ds^2 orthogonal ($ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$), tel que le faisceau des courbes $v = \text{const.}$ jouisse de la propriété indiquée avec un coefficient de proportionnalité $\varphi(v)\,dv$ dépendant arbitrairement de v, est réductible à la forme (8) moyennant un simple changement du paramètre v.

L'indétermination de l'équation (7) s'exprime par le système

$$\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u} = 0,$$

$$\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v} - a\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

$$\sqrt{EG} + a\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0.$$

Si l'on tient compte de la première équation dans la troisième, les deux dernières équations donnent aussitôt

$$\frac{\sqrt{E}}{U} = \frac{\sqrt{G}}{V} = a,$$

où U et V sont deux fonctions des paramètres u et v respectivement, que l'on peut réduire à l'unité en changeant ces paramètres.

On a alors

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = a,$$

et la première équation du système, où $\sqrt{E}$ est remplacé par a, donne par intégration

$$a = \mathfrak{V} e^{-u} \qquad (\mathfrak{V} = \text{fonction arbitraire de } v).$$

L'élément linéaire de S a donc la forme

$$ds^2 = \mathfrak{V}^2 e^{-2u}(du^2 + dv^2),$$

caractéristique des *surfaces applicables sur les surfaces spirales de Maurice Lévy* rapportées aux déformées des spirales gauches ($v = \text{const.}$) et à leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$).

Cette forme est visiblement un cas particulier de (8) avec $a = \mathfrak{V} e^{-u}$. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les surfaces possédant des réseaux invariants indéterminés sont les surfaces spirales et leurs déformées, et le point I, *dont l'association au point courant* P *d'une déformée quelconque de surface spirale donne lieu à l'indétermination du du réseau invariant, est le centre de courbure géodésique de la trajectoire orthogonale des spirales gauches déformées issue de* P$\left(\overline{\text{PI}} = a = \mathfrak{V} e^{-u}\right)$.

Si donc l'on considère une déformée de surface spirale quelconque S, et la surface Σ lieu des centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées, la correspondance ponctuelle qu'un point quelconque P de S et le point correspondant I de Σ établissent entre les deux surfaces est une correspondance par éléments linéaires orthogonaux, et reste telle lorsqu'on déforme S arbitrairement.

J'ai été amené à signaler ce cas singulier de correspondance par éléments linéaires orthogonaux entre deux surfaces dans une étude antérieure (1), où j'avais en vue la recherche des congruences rectilignes admettant pour *enveloppée moyenne* (2), une surface S, ne cessant d'admettre S pour enveloppée moyenne lorsqu'on soumet la surface à une déformation arbitraire, au cours de laquelle elle entraîne les rayons de la congruence supposés invariablement liés à ses plans tangents.

Les congruences en question sont précisément les congruences des perpendiculaires élevées aux plans tangents d'une déformée quelconque S de surface spirale aux centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées.

III. — Forme invariante de l'équation des réseaux (ω).

Nous allons maintenant revenir aux réseaux (ω) invariants, définis dans l'Introduction, associés aux enveloppes de sphères centrées sur une surface quelconque. L'étude de ces réseaux est particulièrement riche en résultats géométriques. Il se trouve, comme on va le voir, que la plupart des particularisations classiques que l'on peut imposer à un réseau (ω) d'une surface, correspondent à des propriétés remarquables de la surface ou de la congruence de sphères associée au réseau envisagé. L'exposition qui va suivre gagnera en simplicité si l'on utilise, pour représenter les réseaux (ω) d'une surface donnée S, une forme invariante que j'ai donnée dans un Mémoire précédent (3) et que je vais tout d'abord rappeler.

Nous supposerons S rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes (u, v), et nous désignerons par (E, F, G), (D, D′, D″) les coefficients de ses deux premières formes fondamentales. Une congruence quelconque de sphères (Σ) admettant S pour déférente sera définie par l'expression $R(u, v)$ du rayon de la sphère centrée au point $P(u, v)$, ou encore, en posant $R^2 = 2\rho$ (4), par la fonction $\rho(u, v)$. Les coordonnées du point I où la corde de contact de la sphère Σ centrée en P perce le plan tangent en P à S sont (*voir* par exemple le *Mémoire cité*)

$$(I)\qquad \begin{cases} \xi = x - \Delta(x, \rho), \\ \eta = y - \Delta(y, \rho), \\ \zeta = z - \Delta(z, \rho), \end{cases}$$

(1) P. VINCENSINI, *Sur la déformation des surfaces et sur quelques propriétés des surfaces spirales* (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1931, t. 59, p. 211-228).

(2) Enveloppe des plans médiateurs des segments focaux.

(3) P. VINCENSINI, *Sur les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères* [*Ann. Éc. Normale*, (3), LXI, p. 119].

(4) Dans le Mémoire cité on avait posé $R^2 = -2\rho$. Nous changeons légèrement la notation pour faciliter le rapprochement de certains résultats établis ici avec des résultats antérieurs.

où x, y, z sont les coordonnées cartésiennes de P, et où Δ représente le paramètre différentiel mixte de deux fonctions relativement au ds^2 de S.

La distance $\overline{PI}$ de la corde de contact au point P est

$$PI = \sqrt{S(\xi - x)^2} = \sqrt{S\overline{\Delta(x, \rho)}^2} = \sqrt{\Delta\rho},$$

$\Delta\rho$ étant le paramètre différentiel du premier ordre de ρ relatif au ds^2 de S.

Exprimons que, conformément à la propriété caractéristique du réseau $(\mathcal{D})$ de S attaché à la congruence de sphères (Σ), donnée dans l'Introduction, les déplacements infinitésimaux simultanés de P et I lorsque P décrit l'une des courbes de $(\mathcal{D})$ sont orthogonaux.

La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$S\, dx\, d\xi \equiv S\, dx[dx - \Delta(x, \rho)] = 0,$$

soit

$$S\, dx^2 - S\, dx\, \Delta(x, \rho) = 0. \tag{9}$$

Le premier terme du premier membre de (9) est le ds^2 de S. Pour expliciter le second terme il suffit de tenir compte des identités

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Delta(x, \rho)}{\partial u} = \rho_{11},$$

$$S\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Delta(x, \rho)}{\partial v} = S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Delta(x, \rho)}{\partial u} = \rho_{12},$$

$$S\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Delta(x, \rho)}{\partial v} = \rho_{22},$$

les ρ_{ij} étant les dérivées secondes covariantes de ρ. On obtient alors

$$S\, dx\, \Delta(x, \rho) = \rho_{11}\, du^2 + 2\rho_{12}\, du\, dv + \rho_{22}\, dv^2,$$

de sorte que $S\, dx\, \Delta(x, \rho)$ n'est autre chose que la différentielle seconde covariante de la fonction $\rho(u, v)$, différentielle que nous désignerons par δ^2_ρ.

L'équation (9) définissant le réseau $(\mathcal{D})$ de S associée à (Σ) peut donc se mettre sous la forme

$$ds^2 - \delta^2_\rho = 0, \tag{10}$$

qui met bien en évidence l'invariance du réseau $(\mathcal{D})$ pour une déformation arbitraire de S.

Sous forme explicite (10) s'écrit

$$(E - \rho_{11})\, du^2 + 2(F - \rho_{12})\, du\, dv + (G - \rho_{22})\, dv^2 = 0, \tag{11}$$

où les dérivées secondes covariantes ρ_{ij} ont les expressions bien connues

$$(12)\quad \begin{cases} \rho_{11} = \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial \rho}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial \rho}{\partial v}, \\ \rho_{12} = \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial \rho}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial \rho}{\partial v}, \\ \rho_{22} = \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial \rho}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial \rho}{\partial v}, \end{cases}$$

les $\left\{ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right\}$ étant les symboles à trois indices de deuxième espèce de Christoffel relatifs au ds^2 de S

$$(12')\quad \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \dfrac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, & \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \dfrac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \dfrac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, & \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \dfrac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \\ \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \dfrac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v} + 2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, & \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \dfrac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}. \end{cases}$$

L'équation (11) montre qu'un réseau choisi arbitrairement sur une surface S n'est généralement pas un réseau ($\mathcal{D}$). Les réseaux ($\mathcal{D}$) de S sont des réseaux spéciaux dont on peut se donner arbitrairement l'une des deux familles de courbes; le réseau est alors défini par une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre | l'équation (11) où $\frac{du}{dv}$ est une fonction déterminée des variables u, v et où $\rho(u, v)$ est la fonction inconnue |. On peut donc se poser des questions telles que les suivantes : Parmi les réseaux ($\mathcal{D}$) d'une surface S, y en a-t-il qui jouissent de propriétés particulières données *invariantes par déformation de* S (orthogonaux, doubles, indéterminés, etc.); ou encore qui, par une déformation *convenable* de S se transforment en réseaux remarquables (conjugués, asymptotiques...). C'est dans cet ordre d'idées que nous allons poursuivre l'étude actuelle. En même temps que certains problèmes importants (tel par exemple celui de la recherche des asymptotiques virtuelles) se présenteront sous des aspects nouveaux, l'étude des congruences de sphères associées aux réseaux envisagés conduira à des propriétés géométriques variées et à des rapprochements avec diverses théories classiques. Autour des réseaux ($\mathcal{D}$) viendront ainsi se grouper, conformément à ce qui a été dit dans l'Introduction, de nombreux problèmes, parfois d'apparence assez éloignés, et cette possibilité de groupement confère aux réseaux ($\mathcal{D}$) un intérêt qui semble mériter d'être signalé.

IV. — Réseaux ($\mathcal{D}$) orthogonaux.

Pour que le réseau ($\mathcal{D}$) défini sur une surface S par l'équation (11) [où ρ est une fonction donnée de u et de v] soit orthogonal, il faut et il suffit qu'il partage harmoniquement le réseau des lignes de longueur nulle de S[$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$]. La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$G(E - \rho_{11}) - 2F(F - \rho_{12}) + E(G - \rho_{22}) = 0,$$

soit

$$\frac{G\rho_{11} - 2F\rho_{12} + E\rho_{22}}{EG - F^2} = 2, \tag{13}$$

ou, en remarquant que le premier membre de (13) n'est autre chose que le paramètre différentiel $\Delta_2\rho$ relatif au ds^2 de S,

$$\Delta_2\rho = 2. \tag{13'}$$

En (13) ou (13') on a l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre définissant ρ, c'est-à-dire les congruences de sphères de déférente S pour lesquelles le réseau ($\mathcal{D}$) est orthogonal.

(13) développée est de la forme

$$G\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - 2F\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + E\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} + \alpha\frac{\partial\rho}{\partial u} + \beta\frac{\partial\rho}{\partial v} + \gamma = 0.$$

L'équation des lignes de longueur nulle de S est l'équation des caractéristiques de l'équation précédente. Si la détermination des lignes de longueur nulle de S est possible, l'intégration de (13) pourra se faire par quadratures. Cette circonstance bien connue est d'une vérification géométrique immédiate. Si l'on rapporte S à ses lignes de longueur nulle ($E = G = 0$) l'équation (13) s'écrira

$$\rho_{12} = F,$$

soit en tenant compte des formules (12) et (12')

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} = F,$$

d'où l'on déduit

$$\rho = \int dv \int F\,du + U + V.$$

Envisageons à titre d'exemple le cas où S est à courbure totale constante K positive. Supposons $K = +1$ et S appliquée sur la sphère de rayon 1. Nous avons donc à déterminer les réseaux ($\mathcal{D}$) orthogonaux de la sphère unitaire S.

Ce dernier problème admet une transformation remarquable qui le ramène à un problème classique de la théorie des surfaces.

Supposons la sphère S centrée à l'origine O des coordonnées d'un système rectangulaire. Soient X, Y, Z les coordonnées de l'un quelconque P(u, v) de ses points ($ds^2 = S\,dX^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$). $\rho(u, v)$ étant une solution quelconque de l'équation (13′) relative au ds^2 de S, portons sur OP le vecteur $\overrightarrow{OH} = \rho\,\overrightarrow{OP}$ et menons le plan (Π) perpendiculaire en H à OP, plan qui a pour équation

$$(\Pi) \qquad Xx + Yy + Zz = \rho.$$

Lorsque P décrit S, (Π) enveloppe une certaine surface (σ), qu'il touche en un point M dont les coordonnées (ξ, η, ζ) peuvent être mises sous la forme (formules de représentation sphérique de Weingarten)

$$(M) \qquad \begin{cases} \xi = \Delta(\rho, X) + \rho X, \\ \eta = \Delta(\rho, Y) + \rho Y, \\ \zeta = \Delta(\rho, Z) + \rho Z, \end{cases}$$

$\Delta(\rho, X)$, $\Delta(\rho, Y)$, $\Delta(\rho, Z)$ étant les coordonnées de la projection orthogonale du point O sur la normale δ en M à (σ).

D'autre part, les abscisses $f_1 = \overline{IF_1}$ et $f_2 = \overline{IF_2}$ des foyers F_1, F_2 du rayon δ de la congruence des normales à (σ) sont données par l'équation du second degré (¹)

$$f^2 + \Delta_2\rho\, f + \Delta_{22}\rho = 0.$$

Si ω est le milieu du segment focal (F_1F_2) de δ on a

$$\overline{I\omega} = -\frac{\Delta_2\rho}{2},$$

et l'équation (13′) montre que

$$\overline{I\omega} = -1.$$

Il résulte de là que le plan moyen de la congruence (δ) relatif à l'un quelconque δ de ses rayons (plan médiateur de F_1F_2) est tangent à la sphère S, et que par suite la surface (σ) est une surface à *développée moyenne* (enveloppe des plans moyens de la congruence de ses normales) *sphérique* (sphère S).

Le problème de la recherche des réseaux $(\mathcal{D})$ orthogonaux d'une sphère *revient donc à celui de la détermination des surfaces à développée moyenne sphérique*. A chaque surface (σ) admettant pour développée moyenne la sphère S, correspond une congruence de sphères (Σ) centrées sur S pour laquelle le réseau $(\mathcal{D})$ associé est un réseau orthogonal de S. D'après ce qui précède on obtient la congruence (Σ) en abaissant, du centre O de S, la perpendiculaire OH

(¹) *Voir* P. VINCENSINI, *Sur certaines congruences de normales dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations* [*Ann. Éc. Norm.* (3), XLVIII, 1931, p. 399].

sur un plan tangent quelconque (Π) de (σ), et en centrant au point P où cette perpendiculaire perce S une sphère de rayon $R = \sqrt{2\rho} = \sqrt{2\overline{OH}}$.

Les surfaces (σ) à développée moyenne sphérique sont, comme il est bien connu, celles que la méthode que Weingarten a proposée pour l'étude du problème de la déformation des surfaces, associe à la déformation du paraboloïde de révolution. Le problème de la recherche des réseaux ($\mathcal{D}$) orthogonaux sur les surfaces à courbure totale constante positive est donc, au fond, équivalent à celui de la déformation du paraboloïde de révolution.

Des résultats établis dans un Mémoire antérieur (¹), auxquels nous aurons à nous reporter dans la suite de ce travail et que nous allons brièvement rappeler, vont nous permettre un nouveau rapprochement intéressant.

Dans le Mémoire cité nous nous sommes proposé la recherche des congruences de sphères, telles que les points de contact de la sphère génératrice avec les deux nappes de l'enveloppe déterminent, sur ces deux nappes, une correspondance qui soit une *équivalence superficielle* (conserve les aires) ou une *applicabilité*. En ce qui concerne l'équivalence il y a lieu de distinguer les deux cas où, sur les contours déterminés sur les deux nappes de l'enveloppe par un pinceau infiniment délié de la congruence des cordes de contact, les points de contact homologues tournent dans le même sens ou dans des sens contraires autour d'un rayon intérieur du pinceau; l'équivalence est dite *directe* ou *inverse* suivant que l'on est dans le premier cas ou dans le second.

Les deux cas se distinguent par une propriété géométrique remarquable. Dans le deuxième cas l'équivalence (inverse) entre les deux nappes *persiste* lorsqu'on déforme la congruence de sphères envisagée en déformant arbitrairement la surface lieu des centres (la déférente), les sphères centrées en ses différents points étant entraînées dans la déformation. Dans le premier cas (équivalence directe), l'équivalence, supposée réalisée pour une congruence donnée, *cesse d'avoir lieu* si l'on déforme la déférente.

Les notations étant celles du n° III, les congruences de sphères solutions du problème de l'équivalence sont définies, pour une déférente donnée (E, F, G, D, D′, D″ connus), par les équations suivantes déterminant la loi de variation du rayon $(R = \sqrt{2\rho})$ de la sphère (Σ) génératrice

$$\frac{D\rho_{22} - 2D'\rho_{12} + D''\rho_{11}}{EG - F^2} + 2\mathcal{H} = 0 \quad \text{(équivalence directe)}, \tag{14}$$

$$\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho - K(\Delta\rho - 2\rho) + 1 = 0 \quad \text{(équivalence inverse)}. \tag{15}$$

Dans (14) et (15), $\mathcal{H}$ et K sont respectivement la courbure moyenne $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ et la courbure totale de la déférente.

(¹) P. Vincensini, *Étude des congruences de sphères dont les deux nappes de l'enveloppe se correspondent avec équivalence ou applicabilité et problèmes de déformation associés* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), LIII, p. 41-82].

Cela étant, revenons au problème de la détermination des réseaux $(\mathcal{D})$ orthogonaux d'une sphère S (de rayon 1). Ils sont définis par l'équation (13). Or, pour une déférente sphérique de rayon 1 on a

$$D = -E, \qquad D' = -F, \qquad D'' = -G. \qquad \mathcal{K} = 2;$$

l'équation (14) est identique à l'équation (13), et l'on peut énoncer le résultat suivant :

Les réseaux $(\mathcal{D})$ *orthogonaux d'une sphère* S *sont les réseaux associés aux congruences de sphères, centrées sur* S, *déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe une correspondance directe conservant les aires.*

Il résulte de ce qu'on dit plus haut que, lorsqu'on passe, par déformation, de la sphère S à une surface à courbure totale constante positive quelconque, *seule la permanence du réseau* $(\mathcal{D})$ *subsiste :* l'équivalence directe des aires sur les deux nappes de l'enveloppe disparaît.

V. — Réseaux $(\mathcal{D})$ dont les deux familles de courbes sont confondues.

Les deux familles de courbes du réseau $(\mathcal{D})$ d'une surface S défini par l'équation (11) sont confondues si l'on a

$$(E - \rho_{11})(G - \rho_{22}) - (F - \rho_{12})^2 = 0,$$

soit

$$\frac{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}{EG - F^2} - \frac{E\rho_{22} - 2F\rho_{12} + G\rho_{11}}{EG - F^2} + 1 = 0, \tag{16}$$

ou encore, en observant que les deux premiers termes du premier membre ne sont autre chose que les deux paramètres différentiels $\Delta_{22}\rho$ et $\Delta_2\rho$ relatifs au ds^2 de S

$$\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + 1 = 0. \tag{17}$$

(17) est une équation du type de Monge-Ampère qui, lorsque S est développable, est identique à la deuxième équation de l'applicabilité des surfaces.

La deuxième équation de l'applicabilité pour une surface quelconque S est en effet

$$\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + 1 = K(2\rho - \Delta\rho), \tag{18}$$

K étant la courbure totale et 2ρ le carré de la distance d'un point fixe de l'espace au point courant de la surface, et cette équation se réduit à (17) lorsque $K = 0$.

Le problème de la recherche des réseaux $(\mathcal{D})$ d'une surface développable S dont les deux familles de courbes sont confondues, et des congruences de sphères centrées sur S associées, revient donc à celui de la déformation de S, et peut par suite être résolu complètement.

Si l'on prend l'élément linéaire de S sous la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

l'équation (17), compte tenu des relations (12), (12′) s'écrit

$$\left(1 - \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}\right)\left(1 - \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v}\right)^2 = 0, \tag{19}$$

et il suffit de poser

$$\rho = \lambda + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \tag{20}$$

pour lui donner la forme

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}\right)^2 = 0, \tag{21}$$

qui définit λ, en fonction de u et v, comme la cote d'un point décrivant une surface développable arbitraire (Δ) rapportée à un système d'axes de coordonnées rectangulaires auxiliaire $[Ou, Ov, O\lambda]$.

De là résulte la construction géométrique suivante des congruences de sphères, centrées sur une développable S, et pour lesquelles le réseau invariant $(\mathcal{D})$ associé est formé de deux familles de courbes confondues :

Appliquons S sur le plan (Ouv) d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires $O(u, v, \lambda)$. Donnons-nous, par rapport au trièdre $O(u, v, \lambda)$, une développable auxiliaire quelconque (Δ), et projetons son point courant M en p sur le plan (Ouv). Si l'on pose $\lambda = \overline{pM}$, l'expression (20) définit le rayon $R = \sqrt{2\rho}$ de la sphère Σ qu'il faut centrer au point P, homologue de p dans l'application du plan (Ouv) sur S, pour obtenir la congruence de sphères la plus générale de déférente S pour laquelle le réseau $(\mathcal{D})$ est formé de deux familles de courbes confondues.

Quant aux courbes du réseau $(\mathcal{D})$ elle-mêmes, elles sont définies, d'après l'équation (11) où il est tenu compte de $E = G = 1$, $F = 0$, par l'équation

$$\left(1 - \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}\right) du - \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v}\, dv = 0,$$

et (19) montre aussitôt qu'elles constituent une famille à un paramètre de *lignes géodésiques* de S.

Toute famille de ∞^1 géodésiques d'une surface développable peut d'ailleurs être considérée comme un réseau $(\mathcal{D})$ de la surface dont les deux familles de courbes sont confondues. Nous verrons plus loin (n° IX), que la véritable raison géométrique du fait que les familles de ∞^1 géodésiques d'une développable quelconque sont des réseaux $(\mathcal{D})$, tient à ce que tout ensemble de ∞^1 géodésiques d'une développable S peut être regardé comme un *système d'asymptotiques*

(*doubles*) *virtuelles* de S, c'est-à-dire un système de courbes susceptible de se transformer en la famille des asymptotiques doubles rectilignes d'une déformée convenable de S.

La deuxième équation de l'applicabilité (18) pour une surface quelconque S définit, comme l'on sait, les congruences de sphères (Σ) centrées sur S [le rayon de la sphère centrée au point (u, v) étant $R = \sqrt{2\rho}$], telles qu'il existe une déformation de S après laquelle les différentes sphères (Σ) passent par un point fixe de l'espace. En introduisant la notion de *courbure d'une congruence de sphères* due à A. Demoulin (1), ces congruences sont, comme ce géomètre l'a montré, les congruences de courbure $+1$. On peut donc dire :

Les congruences à déférente développable S *dont les réseaux* (ω) *sont formés de deux familles de courbes confondues sont les congruences de déférente* S *de courbure* $+1$, *et les réseaux* (ω) *correspondants sont constitués par les différentes familles de* ∞^1 *géodésiques de* S.

Cet énoncé sera généralisé plus loin (n° X).

VI. — Réseaux (ω) indéterminés.

Le réseau (11) est indéterminé sur S si l'on a

$$\rho_{11} = E, \qquad \rho_{12} = F, \qquad \rho_{22} = G. \tag{22}$$

Supposons S rapportée à un système orthogonal tel, que le long d'une courbe $u = \text{const.}$ quelconque, le rayon de la sphère génératrice de la congruence (Σ) associée au réseau soit constant. On aura alors

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

et le rayon R de Σ $\left(\text{et par suite } \rho = \frac{R^2}{2}\right)$ ne dépendra que de u.

Le système (22) s'écrira dans ces conditions [*voir* les formules (12) et (12′)]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial E}{\partial u}\dfrac{\partial \rho}{\partial u} - E = 0, \\ \dfrac{\partial E}{\partial v}\dfrac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial \rho}{\partial u} - G = 0. \end{cases} \tag{23}$$

ρ ne pouvant évidemment être constant, la deuxième équation (23) montre que E est une fonction de u seul, que l'on peut réduire à l'unité en changeant

(1) La courbure d'une congruence de sphères est celle de la forme quadratique $d\sigma^2 = \dfrac{ds^2 - dR^2}{R^2}$ [*voir* A. Demoulin, *Bull. Ac. roy. de Belgique*, 5e série, 19, 1933, p. 877].

le paramètre u. On a alors

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

et (23) devient

$$\text{(24)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = 1, \\ \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial \rho}{\partial u} = 1, \end{cases}$$

d'où, en disposant du paramètre v et en ajoutant une constante à u,

$$\text{(25)} \qquad \begin{cases} G = u^2, \\ 2\rho = R^2 = u^2 + a \qquad (a = \text{const.}). \end{cases}$$

Le ds^2 de S$[ds^2 = du^2 + u^2 dv^2]$ est celui d'un plan (II) rapporté à des coordonnées polaires. S est donc une surface développable, et l'expression de R^2 prouve que, lorsqu'on applique S sur (II), les sphères de la congruence (Σ) viennent former un réseau de sphères passant par deux points fixes symétriques par rapport au plan (II), et à la distance $\sqrt{a}$ de ce dernier.

Ainsi, seules les développables possèdent des réseaux (ω) indéterminés. D'après ce qui précède, S étant une développable quelconque, on obtient la congruence de sphères (Σ) la plus générale donnant lieu à l'indétermination du réseau (ω) associé, *en déformant le plan* (II) *des centres d'un réseau de sphères passant par deux points fixes* M *et* M′ *symétriques par rapport à* (II), *de façon à à venir appliquer ce plan sur* S.

Les deux nappes de l'enveloppe de (Σ) après l'application de (II) sur S se réduisent à deux courbes Γ, Γ', à savoir les courbes décrites respectivement par M et M′ (invariablement liés à II), lorsqu'on fait rouler sans glisser (II) sur S, de façon que la courbe du plan (II) correspondant à l'arête de rebroussement de S roule sans glisser sur cette arête de rebroussement.

Les congruences de sphères à réseaux associés (ω) indéterminés que l'on vient d'obtenir ont été étudiées à un autre point de vue dans un Mémoire déjà cité (¹). Ce sont les seules congruences de sphères pour lesquelles les couples de foyers associés sur les différents rayons de la congruence des cordes de contact sont symétriques par rapport aux plans tangents correspondants de la déférente et restent symétriques par rapport à ces plans tangents lorsqu'on déforme la déférente arbitrairement. Elles jouissent d'ailleurs de la propriété, également caractéristique, que leurs nappes focales se réduisent à deux courbes (Γ, Γ') sur lesquelles les couples de points de contact associés (M, M′) se correspondent *avec égalité des arcs homologues*, l'égalité des arcs subsistant lorsque la déférente est arbitrairement déformée (²).

(¹) *Ann. Éc. Norm.*, (3), LIII, p. 41-82.

(²) L'égalité des arcs en question résulte aussitôt de ce que, pendant le roulement de (II) sur S, le milieu I, de MM′ décrit une courbe (trajectoire orthogonale des plans tangents à S) à laquelle le segment MM′ reste constamment tangent.

Il est à noter que le résultat de ce numéro rentre dans le cas général d'indétermination étudié au n° II : la surface *spirale* sur laquelle s'applique la déférente est ici un *plan*.

VII. — Réseaux (ω) minima.

Pour que le réseau (11) d'une surface S soit minima (formé des lignes de longueur nulle de S), il faut et il suffit que la fonction ρ vérifie le système d'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\rho_{11}}{E} = \frac{\rho_{12}}{F} = \frac{\rho_{22}}{G}. \tag{26}$$

Le système (26) se traite directement sans difficultés, mais on peut donner au problème de la recherche des réseaux (ω) minima l'interprétation suivante.

Il est clair que sur toute surface le réseau des lignes de longueur nulle est un réseau (ω), correspondant à la solution évidente $\rho = \text{const.}$ du système (26). Les congruences de sphères fournissant ce réseau sont les congruences de rayon constant centrées sur la surface; nous les écarterons dans la suite. Envisageons alors les familles de systèmes triples orthogonaux de surfaces dont S fait partie. La portion de normale infiniment petite comprise entre S et une surface infiniment voisine du même système dans l'une quelconque de ces familles, a une expression de la forme $\varepsilon\rho$, où ε est une constante infinitésimale, et où ρ est une fonction de u et v vérifiant l'équation (de Cayley)

$$\begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Le premier membre de l'équation (27) développée est une expression linéaire et homogène en D, D′, D″, et l'on obtient le système (26) en annulant les coefficients de D, D′, D″.

(26) fournit donc, si elles existent, les solutions de l'équation (27) de Cayley (regardée comme attachée à la surface S) qui *persistent* lorsqu'on déforme S arbitrairement (c'est-à-dire ne cessent d'être solutions de de l'équation de Cayley lorsque cette équation varie du fait de la déformation de S). Le problème de la recherche des réseaux (ω) minima est donc ramené à celui *de la recherche des surfaces* S *dont les équations de Cayley correspondantes admettent des solutions persistantes* (*par déformation de* S).

Or ce dernier problème est connu. Ses solutions sont fournies par les surfaces applicables sur les surfaces de révolution. Si S est une telle surface, et si son ds^2 est mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2, \tag{28}$$

les solutions persistantes de l'équation de Cayley correspondante sont

$$\rho = \lambda \int_{u_0}^{u} U\,du \qquad (\lambda,\ u_0 = \text{const.}). \tag{29}$$

Dans un travail déjà cité (¹) j'ai montré que si l'on centre, en chaque point (u, v) d'une surface applicable sur une surface de révolution d'élément linéaire (28), une sphère de rayon $R = \sqrt{2\rho}$, ρ ayant l'expression (29), on obtient une congruence de sphères (Σ) à congruence des cordes de contact normale *restant normale* pour une déformation arbitraire de la surface lieu des centres. Ces congruences (Σ) sont d'ailleurs, les congruences de sphères égales centrées sur une surface quelconque ayant été écartées, les plus générales à congruences des cordes de contact normales restant normales par déformation arbitraire de la déférente. On peut donc dire :

Les réseaux (ω) *minima sont les réseaux* (ω) *associés aux congruences de sphères à congruences des cordes de contact normales restant normales au cours d'une déformation arbitraire de la déférente.*

Ce dernier résultat peut d'ailleurs être établi de façon purement géométrique si l'on a égard à la propriété des réseaux invariants (ω), signalée dans l'Introduction, suivant laquelle, un réseau (ω) d'une surface S, relatif à une congruence de sphères (Σ) centrées sur S, partage harmoniquement le réseau conjugué qui correspond, sur S, aux développables de la congruence des cordes de contact de (Σ).

Le réseau (ω) étant minima, il en résulte que le réseau conjugué de S qu'il partage harmoniquement est orthogonal; or les tangentes de ce dernier réseau sont, comme on l'a rappelé dans l'Introduction, perpendiculaires aux plans focaux de la congruence des cordes de contact; cette congruence est donc *normale*, et, en vertu de l'invariance du réseau (ω), *reste normale au cours d'une déformation arbitraire de* S.

VIII. — Réseaux (ω) conjugués.

Toutes les conditions imposées aux réseaux (ω) considérés jusqu'à présent avaient le caractère invariant (par déformation de la surface support). Nous allons maintenant envisager des conditions ne possédant pas ce caractère d'invariance. Demandons-nous par exemple si un réseau (ω) peut être *conjugué* (au sens de Dupin) sur la surface qui le porte.

(¹) *Ann. Éc. Norm.*, (3), LXI, p. 119.

Envisageons, sur une surface donnée quelconque S, un réseau $(\mathcal{D})$ quelconque défini par l'équation générale (11) du n° III,

$$(11) \qquad (E-\rho_{11})\,du^2+2(F-\rho_{12})\,du\,dv+(G-\rho_{22})\,dv^2=0,$$

où ρ est une fonction arbitraire des deux variables u et v.

Le réseau (11) sera conjugué si l'on a

$$D''(E-\rho_{11})-2D'(F-\rho_{12})+D(G-\rho_{22})=0,$$

soit en introduisant la courbure moyenne $\left(\mathcal{H}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\frac{GD-2FD'+ED''}{EG-F^2}\right)$ de S :

$$(30) \qquad \frac{D''\rho_{11}-2D'\rho_{12}+D\rho_{22}}{EG-F^2}+\mathcal{H}=0.$$

(30), où l'on remplace les ρ_{ij} par leurs expressions (12) est une équation linéaire du second ordre en ρ, dont l'intégration fera connaître les congruences de sphères centrées sur S pour lesquelles les réseaux $(\mathcal{D})$ associés [définis sur S par l'équation (11)] sont conjugués.

L'équation définissant les caractéristiques de (30) est celle des lignes asymptotiques de S, et, en rapportant S à ses lignes asymptotiques, on peut ramener (30) à la forme

$$(31) \qquad \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}+\alpha\frac{\partial\rho}{\partial u}+\beta\frac{\partial\rho}{\partial v}+\gamma=0,$$

équation qui, dans le cas particulier où S est minima ($\mathcal{H}=0$), se simplifie et s'écrit

$$(31') \qquad \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}+\alpha\frac{\partial\rho}{\partial u}+\beta\frac{\partial\rho}{\partial v}=0.$$

L'équation (30) est susceptible d'une interprétation géométrique intéressante. Si nous nous reportons à ce que nous avons dit au n° IV, au sujet des congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de leur enveloppe une correspondance avec équivalence des aires homologues, nous voyons que (30) n'est autre chose que l'équation (14) définissant les congruences pour lesquelles la correspondance en question est une *équivalence directe*. Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Sur toute surface S *il existe une infinité de réseaux* $(\mathcal{D})$ *conjugués* (*dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument*), *et ces réseaux sont les réseaux associés aux congruences de sphères, centrées sur* S, *déterminant une équivalence superficielle directe sur les deux nappes de leurs enveloppes.*

Nous avons signalé au n° IV une différence essentielle entre les deux espèces (*inverses* ou *directes*) de correspondances par aires équivalentes entre les deux nappes de l'enveloppe d'une famille de sphères à deux paramètres. Les

premières persistent au cours d'une déformation arbitraire de la surface S des centres, alors qu'il n'en est pas de même pour les deuxièmes. Le numéro actuel explique géométriquement la non-permanence des équivalences directes. Les familles de sphères donnant lieu à l'équivalence directe sont précisément celles pour lesquelles le réseau permanent $(\mathcal{D})$ associé de la surface S des centres est un réseau *conjugué*, et ce réseau *ne peut se maintenir conjugué* au cours d'une déformation *arbitraire* de S.

Nous laissons ici de côté l'étude de l'intégration de l'équation (30) [ou (31)]. Nous rappellerons seulement (*voir* le Mémoire du t. 53 des *Annales de l'École Normale* cité n° IV) que cette intégration peut être effectuée complètement lorsque S est à courbure totale constante, et que, dans le cas où S est minima, l'équation de Laplace (31′) peut toujours être ramenée à avoir ses invariants égaux, et s'intègre complètement dans le cas de l'hélicoïde minima réglée.

IX. — Réseaux $(\mathcal{D})$ asymptotiques. Caractérisation géométrique des asymptotiques virtuelles d'une surface.

Les lignes asymptotiques d'une surface quelconque jouissent d'une propriété géométrique remarquable :

Sur toute surface, le réseau qu'elles forment est un réseau $(\mathcal{D})$.

Pour établir ce résultat, et pour obtenir en même temps les congruences de sphères admettant pour réseau $(\mathcal{D})$ le réseau asymptotique d'une surface quelconque S, nous supposerons S rapportée à ses lignes asymptotiques. Pour que celles-ci forment un réseau $(\mathcal{D})$, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer la fonction $\rho(u, v)$, de façon que l'équation (11) définissant les différents réseaux $(\mathcal{D})$ de S se réduise à

$$du\,dv = 0.$$

Cela exige que ρ vérifie le système des deux équations aux dérivées partielles

$$\rho_{11} - E = 0, \qquad \rho_{22} - G = 0. \tag{32}$$

soit, en remplaçant ρ_{11} et ρ_{22} par leurs expressions

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial\rho}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial\rho}{\partial v} - E = 0, \\ \dfrac{\partial^2\rho}{\partial v^2} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial\rho}{\partial u} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \dfrac{\partial\rho}{\partial v} - G = 0. \end{cases} \tag{32′}$$

Le système (32′) n'est évidemment pas en involution; son intégrale générale, si elle existe, dépend au plus de *quatre* constantes arbitraires. Nous allons montrer qu'il existe effectivement une intégrale du système précédent admettant ce degré maximum de généralité : la complète intégrabilité du système en résultera, ainsi que le caractère $(\mathcal{D})$ de tout réseau asymptotique.

Supposons en effet la surface S rapportée à un système d'axes rectangulaires dont l'origine O occupe, par rapport à S, une position *arbitraire* (le choix de cette origine mettant par suite en jeu *trois* constantes arbitraires). On sait (¹) que si $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont les coordonnées d'un point quelconque P de S relatives au système d'axes choisi, si W représente la distance de l'origine O au plan tangent en P à S, et si l'on pose

$$r = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

on a les trois relations

$$(33) \qquad \begin{cases} r_{11} = E + DW, \\ r_{12} = F + D'W, \\ r_{22} = G + D''W, \end{cases}$$

les r_{ij} désignant toujours les dérivées secondes covariantes de r relativement au ds^2 de S.

Or, dans le cas actuel où S est rapportée à ses lignes asymptotiques, on a

$$D = D'' = 0,$$

et les équations (33) donnent

$$r_{11} - E = 0, \qquad r_{22} - G = 0;$$

r est donc une solution du système (32) [ou (32′)], qui admet par suite la solution $\rho = r = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

La solution ρ ainsi obtenue dépend des trois paramètres qui fixent l'origine O par rapport à S; en lui ajoutant une constante arbitraire on obtient une solution $(\rho + c)$ du système (32′), dépendant de *quatre* constantes arbitraires, et fournissant par suite l'intégrale générale du système envisagé.

Ainsi, comme on l'avait annoncé, le réseau asymptotique d'une surface quelconque S est un réseau $(\mathcal{D})$. En outre, l'expression du rayon de la sphère génératrice de l'une quelconque des congruences de déférente S admettant pour réseau $(\mathcal{D})$ associé le réseau des asymptotiques de S, donnée par

$$R^2 = 2\rho + \text{const.} = x^2 + y^2 + z^2 + \text{const.},$$

montre qu'*on obtient ces différentes congruences, en se donnant dans l'espace une sphère fixe quelconque* Ω, *et en centrant aux différents points de* S *les sphères orthogonales à* Ω.

Si on laisse fixe le centre de la sphère Ω et si l'on fait varier son rayon, les ∞^1 congruences de sphères (Σ) centrées sur S et orthogonales respective-

(¹) *Voir par exemple*, L. Bianchi, *Lezioni*, t. I, p. 220.

ment aux diverses sphères concentriques Ω obtenues, ont toutes la même congruence des cordes de contact (car on passe d'une congruence à une autre en ajoutant une constante aux carrés des rayons des sphères). Eu égard au réseau (I) décrit par le point I où la corde de contact d'une sphère Σ centrée en P perce le plan tangent en P à S lorsque P décrit le réseau asymptotique de S, réseau dont les courbes correspondent par orthogonalité des éléments aux asymptotiques de S conformément à la définition des réseaux ($\mathcal{D}$), on peut dire qu'*il ne dépend que de la position du centre de la sphère* Ω et non de la congruence particulière (Σ) que l'on envisage. Le centre de Ω variant, on obtient ∞^2 réseaux (I) associés par orthogonalité des éléments linéaires au réseau des asymptotiques de S, de sorte que tout réseau asymptotique peut en réalité être regardé comme un réseau ($\mathcal{D}$) de ∞^3 façons différentes.

Dans chacune de ces façons de regarder le réseau asymptotique d'une surface S comme un réseau ($\mathcal{D}$), la congruence des cordes de contact se réduit à une gerbe ayant pour sommet un point arbitraire de l'espace (le centre O de la sphère fixe Ω correspondante); les points I associés aux différents points P de S sont les projections orthogonales de O sur les différents plans tangents à S, et l'on voit que l'on peut définir ainsi les différentes lignes asymptotiques de S :

Associons à S l'une quelconque de ses podaires $\mathfrak{P}$ (lieu des projections orthogonales I d'un point fixe O de l'espace sur les plans tangents à S), et envisageons la correspondance ponctuelle établie entre S et $\mathfrak{P}$ en associant à chaque point P de S le point correspondant I de $\mathfrak{P}$. Les lignes asymptotiques de S *sont les courbes de* S *correspondant par orthogonalité des éléments linéaires aux courbes homologues de* $\mathfrak{P}$.

Le résultat précédent est une conséquence géométrique immédiate de l'orthogonalité des éléments linéaires homologues des lignes asymptotiques d'une surface et de leur représentation sphérique; à ce titre son intérêt peut paraître assez limité. Mais le fait que, lorsqu'on déforme la surface S, le réseau (I) de l'une quelconque de ses podaires $\mathfrak{P}$, considéré comme constitué par l'ensemble des points I distribués sur les courbes de $\mathfrak{P}$ correspondant aux asymptotiques de S, ne cesse, si l'on suppose chaque point I invariablement lié au plan tangent de S qui le contient, de correspondre avec orthogonalité des éléments linéaires homologues au déformé du réseau asymptotique initial, conduit à une caractérisation géométrique remarquable des *asymptotiques virtuelles* d'une surface.

Tout d'abord, le caractère ($\mathcal{D}$) d'un réseau de courbes d'une surface quelconque S étant un invariant de déformation pour S, les réseaux obtenus à partir des asymptotiques d'une surface par déformation arbitraire de celle-ci (réseaux d'asymptotiques virtuelles des déformées) sont des réseaux ($\mathcal{D}$). Et comme tout réseau d'asymptotiques virtuelles d'une surface quelconque

peut, par définition, être transformé en un réseau asymptotique par une déformation convenable de sa surface support, on voit que :

Sur toute surface S, *non seulement le système des asymptotiques actuelles, mais aussi tous les systèmes d'asymptotiques virtuelles, sont des réseaux* ($\mathcal{D}$).

Caractérisons maintenant les congruences de sphères (Σ) centrées sur S, associées aux différents réseaux ($\mathcal{D}$) formés par les asymptotiques tant actuelles que virtuelles.

Pour les asymptotiques actuelles on a vu que les congruences (Σ) [en disposant de la constante que l'on peut ajouter aux carrés des rayons des différentes sphères] sont constituées par les sphères centrées sur S et passant par un point fixe arbitraire de l'espace.

Considérons ensuite un réseau quelconque (A) d'asymptotiques virtuelles de S. Il existe une déformée $\overline{S}$ de S sur laquelle le réseau ($\overline{A}$) déformé de A est asymptotique. Toute famille de sphères (Σ) associée au réseau (A) de S se transforme donc (après addition d'une constante convenable aux carrés des rayons), lorsqu'on applique S sur $\overline{S}$, en une famille de sphères passant par un point fixe de l'espace. Les familles (Σ) constituent par suite (*voir* le n° V) des congruences de sphères de courbure $+1$. De là résulte la définition géométrique suivante des différents réseaux d'asymptotiques virtuelles d'une surface quelconque S :

Ce sont les réseaux ($\mathcal{D}$) *associés aux différentes congruences de sphères de courbure* $+1$ *centrées sur* S.

Le problème de la recherche des asymptotiques virtuelles d'une surface S a été ramené par G. Darboux à l'intégration d'un système de deux équations aux dérivées partielles du deuxième ordre du type hyperbolique (¹).

Nous venons ici de le ramener à sa véritable origine géométrique : intégration de la deuxième équation aux dérivées partielles de la déformation de S, suivie de l'intégration de l'équation différentielle (11) [qui revient en somme à la détermination des asymptotiques de l'une des surfaces déformées de S].

X. — Sur un théorème d'O. Bonnet, et sur les congruences paraboliques de sphères de courbures $+1$.

Au deuxième aspect du problème de la recherche des asymptotiques virtuelles d'une surface, envisagé à la fin du numéro précédent, on peut aisément rattacher certaines propositions classiques de la théorie des surfaces.

(¹) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 285.

Considérons par exemple la proposition d'O. Bonnet suivant laquelle *sur deux surfaces applicables les asymptotiques ne peuvent se correspondre que si les surfaces sont égales ou symétriques.*

Soient S, S′ deux surfaces applicables avec correspondance des réseaux asymptotiques. Envisageons une surface quelconque S″ applicable sur S et S′, et désignons par (A) le réseau (d'asymptotiques virtuelles) de S″ correspondant aux réseaux asymptotiques de S et S′. (Σ) étant une congruence de sphères *de courbure* $+1$ admettant (A) pour réseau ($\mathcal{D}$) associé (définie par une certaine solution ρ de la deuxième équation de l'applicabilité), nous savons que les applications de S″ sur S ou S′, qui transforment les asymptotiques virtuelles (A) en asymptotiques effectives de S ou S′ amènent, dans chacun des deux cas, les sphères (Σ) à passer par un point fixe de l'espace. Or il est bien connu que la solution ρ de la deuxième équation de l'applicabilité de S″ *individualise* (à une symétrie près) une déformation de S″ après laquelle les sphères (Σ) viennent passer par un point fixe; les deux surfaces S et S′ *sont donc égales* (ou symétriques).

La proposition précédente d'O. Bonnet peut, comme l'on sait (¹), être complétée par la suivante :

A une exception près (visant deux surfaces réglées applicables avec correspondance des génératrices rectilignes), *deux surfaces* S, S′, *applicables avec correspondance* d'une *famille d'asymptotiques de l'une et* d'une *famille d'asymptotiques de l'autre, sont égales* (*ou symétriques*).

On peut rattacher cette deuxième proposition à un résultat relatif aux réseaux ($\mathcal{D}$) dont *l'une des deux familles de courbes est formée de lignes asymptotiques de la surface support* S.

Envisageons un tel réseau ($\mathcal{D}$), et soient (u) ses asymptotiques et (v) les courbes de la seconde famille. Considérons une famille de sphères (Σ) associée au réseau. Les courbes (α) et (β) de S correspondant aux développables de la congruence des cordes de contact de (Σ) forment un réseau qui est, d'une part (*voir* l'Introduction) conjugué au sens de Dupin sur S [et divise donc harmoniquement le réseau asymptotique (A) de S], d'autre part conjugué harmonique par rapport au réseau (u, v) [propriété générale des réseaux ($\mathcal{D}$)]. Les réseaux (A) et (u, v) ayant en commun la famille de courbes (u), l'existence du réseau [(α), (β)] conjugué harmonique commun aux deux précédents amène à considérer les deux cas suivants :

1° les deux familles de courbes du réseau [(α), (β)] sont *distinctes :* les réseaux (u, v) et (A) sont alors *identiques*, et par suite la deuxième famille de courbes (v) du réseau ($\mathcal{D}$) envisagé est formée elle aussi d'asymptotiques; *le réseau* (u, v) *est le réseau asymptotique de* S.

(¹) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 287.

2° les deux familles (α) et (β) *sont confondues avec la famille des asymptotiques* (u) *de* S : la congruence de sphères (Σ) associée au réseau $(\mathcal{D})$ est alors telle que la congruence de ses cordes de contact a ses deux familles de développables *confondues* (congruence parabolique). Toute congruence de sphères à congruence des cordes de contact parabolique (qui dans la suite sera dite elle-même parabolique) donne d'ailleurs un réseau $(\mathcal{D})$ associé de type actuel, celle des deux familles de courbes du réseau qui est formée d'asymptotiques correspondant à l'unique famille de développables de la congruence des cordes de contact.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'une des deux familles de courbes d'un réseau $(\mathcal{D})$ *d'une surface* S *est l'une des deux familles d'asymptotiques de* S, *ou bien* $(\mathcal{D})$ *est le réseau des asymptotiques de* S, *ou bien il est associé à une congruence de sphères parabolique.*

On pressent le lien entre la proposition précédente et le théorème généralisé d'O. Bonnet dont il a été question plus haut. Soient, conformément à l'énoncé de ce théorème, S et S′ deux surfaces applicables avec correspondance des asymptotiques d'une famille que nous désignerons par (u) sur les deux surfaces. Désignons par (v) les asymptotiques de la seconde famille sur S, et (v') les courbes de S′ que l'application de S sur S′ fait correspondre aux courbes (v) de S. Imaginons une congruence (de courbure $+1$) de sphères (Σ) centrées sur S et admettant le réseau asymptotique (u, v) pour réseau $(\mathcal{D})$ associé. L'application de S sur S′ conservant le caractère $(\mathcal{D})$ du réseau (u, v) [en même temps que la courbure de la congruence (Σ)], le réseau (u, v') de S′ est un réseau $(\mathcal{D})$ dont l'une des deux familles de courbes [les courbes (u)] est formée d'asymptotiques. La proposition précédemment établie s'applique donc, et le réseau (u, v') de S′ est, ou bien asymptotique, ou bien un réseau $(\mathcal{D})$ associé à une congruence parabolique de sphères de courbure $+1$.

Nous pourrions maintenant invoquer le théorème d'O. Bonnet pour en conclure que *les congruences de sphères paraboliques de courbure* $+1$ *sont à déférentes réglées*. Il sera plus instructif de démontrer directement le résultat : d'une part la démonstration complète du théorème d'O. Bonnet se trouvera présentée sous forme entièrement géométrique, et d'autre part nous serons conduits à une construction remarquablement simple des congruences de sphères paraboliques de courbure $+1$.

Soit donc S′ la déférente d'une congruence parabolique de sphères (Σ) de courbure $+1$. Désignons par P′ un point quelconque de S′ et par D′ la corde de contact de la sphère Σ centrée en P′. La congruence des cordes (D′) est par hypothèse parabolique; chaque rayon D′ porte un seul foyer (double) F′ décrivant, lorsque D′ décrit une développable de la congruence (D′), une asymptotique de l'unique nappe focale (Γ) de (D′); en outre les développables de (D′)

correspondent, comme l'on sait, à une famille d'asymptotiques (u) de S', et (*voir* l'Introduction) la tangente à l'une des asymptotiques (u) en l'un quelconque P' de ses points est perpendiculaire au plan tangent correspondant de la développable décrite par D' lorsque P' décrit (u).

Cela étant, la courbure de la congruence de sphères (Σ) étant égale à $+1$, il existe une déformée S de S' telle que l'application de S' sur S amène toutes les droites de la congruence (D') [invariablement liées aux plans tangents correspondants de S'] à passer par un point fixe O de l'espace. Cette application amène le point P' de S' en un certain point P de S, et le rayon D' (perpendiculaire en I' au plan tangent en P' à S') dans une certaine position D, passant par O, et perpendiculaire au plan tangent en P à S au point I homologue de I'.

Il est bien connu que lorsque les rayons d'une congruence sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface et invariablement liés à ces plans tangents, une déformation arbitraire de la surface laisse invariant le produit des distances de deux foyers associés quelconques au plan tangent correspondant. Il résulte de là que $\overline{I'F'}^2 = \overline{IO}^2$; les points O et F' sont à la même distance des plans tangents respectifs aux surfaces S et S'. La déformation qui amène S sur S', et par suite I en I', superpose le point O au point F'. Cette déformation ne modifie donc pas les positions que les différents segments (PO) occupent par rapport aux plans tangents correspondants : elle amène les différents segments (PO), supposés invariablement liés aux plans tangents correspondants de S, en coïncidence avec les segments correspondants (P'F'). Dans la déformation les segments (PO) [normaux à la sphère point O] ne cessent (Beltrami) d'être normaux à la surface lieu de leurs deuxièmes extrémités. On en conclut que les différents segments (P'F') sont normaux à la surface Γ, lieu des points F' et nappe focale de la congruence (D') des droites (I'F').

Si Γ n'est pas réduite à une courbe, la dernière circonstance indiquée exige que P'F' soit perpendiculaire à I'F', donc que F' soit en I', et par suite (d'après $IO = I'F'$) que la distance du point fixe O au plan tangent en un point quelconque P de S soit nulle. S est alors un cône de sommet O, et S', applicable sur S avec correspondance des asymptotiques, est aussi *un cône*, la surface Γ étant réduite à son sommet.

Ce cas particulier écarté, Γ est nécessairement une courbe; la congruence parabolique (D') est donc *singulière*, et ses rayons sont, comme il est bien connu, répartis suivant ∞^1 faisceaux dont les sommets sont les différents points de Γ et dont les plans sont des plans tangents à Γ.

Considérons alors la développable de (D') correspondant à une asymptotique (u) de S'; les déplacements suivant (u) sont, comme nous l'avons dit, normaux à ses différents plans tangents; or la développable est *plane* (son plan étant comme on l'a vu un plan tangent à la courbe Γ); les déplacements suivant (u) ont donc une *direction fixe*, et (u) est par suite *une droite* perpendiculaire à un certain plan tangent à Γ.

Il résulte de là, comme on l'avait annoncé, que *les congruences paraboliques de sphères de courbure* $+1$ *sont à déférentes réglées*, toute surface réglée pouvant d'ailleurs être regardée (évidemment d'une infinité de façons) comme la déférente d'une congruence parabolique de sphères de courbure $+1$.

Revenons maintenant au théorème d'O. Bonnet. Nous avons établi plus haut que si S et S′ sont deux surfaces applicables avec correspondance d'une famille (u) de lignes asymptotiques, ou bien les deux familles d'asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces (qui sont alors égales ou symétriques), ou bien le réseau de l'une quelconque des deux surfaces correspondant aux asymptotiques de l'autre [qui est un réseau $(\mathcal{D})$ puisque formé d'asymptotiques virtuelles] est associé à une congruence parabolique de sphères de courbure $+1$.

Dans ce dernier cas, conformément à la proposition d'O. Bonnet, S et S′ sont comme nous venons de le voir, deux surfaces réglées admettant les asymptotiques (u) comme génératrices rectilignes. La proposition d'O. Bonnet se trouve ainsi complètement démontrée par la géométrie, et le raisonnement employé met en évidence la construction suivante des congruences paraboliques de sphères de courbure $+1$.

(Σ) étant une telle congruence de déférente S′, on a vu que les développables de la congruence des cordes de contact de (Σ) correspondant aux asymptotiques rectilignes (u), sont des faisceaux plans dont les sommets, F′, sont distribués sur une courbe gauche Γ, à laquelle les différents segments (P′F′) restent orthogonaux lorsque P′ décrit la génératrice (u). Les sphères de la congruence (Σ) centrées aux différents points P′ d'une même génératrice rectiligne (u) de S′ passent toutes par le sommet F′ du faisceau correspondant, et forment par suite un faisceau, admettant pour cercle de base, le cercle C′ ayant pour axe la génératrice (u) et passant par F′. En outre, puisque les segments (P′F′) sont normaux à la courbe Γ lieu de F′, le cercle C′ est tangent en F′ à Γ. De là résulte l'énoncé suivant, que le calcul confirme sans difficulté :

La congruence parabolique de sphères de courbure $+1$ *la plus générale est constituée par l'ensemble des sphères de* ∞^1 *faisceaux, dont les cercles de base forment une suite continue et sont placés tangentiellement à une courbe gauche arbitraire.*

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

PAR M. MARCEL DECUYPER.

1. *Introduction.* — Nous allons, par les procédés de la géométrie élémentaire, esquisser une théorie complète de l'hypocycloïde à trois rebroussements que nous désignerons par H_3. Nous nous appuierons sur une proposition de M. Hadamard (1) : *Le segment intercepté sur une tangente fixe à* H_3 *par deux tangentes rectangulaires variables a pour milieu un point fixe situé sur le cercle inscrit.*

Nous démontrerons d'abord ce théorème, puis, les principales propriétés de la courbe, entre autres, ce résultat dû à Cremona (2) : *l'*H_3 *découpe sur une tangente quelconque un segment de longueur constante;* nous signalerons ensuite une génération tangentielle nouvelle de H_3 et quelques applications. Enfin, nous démontrerons, en nous plaçant successivement à deux points de vue différents, qu'*il y a* ∞^1 H_3 *tangentes à trois droites données et une seule* H_3 *tangente à quatre droites données*, en supposant bien entendu, que ces droites ont des directions distinctes.

2. *Définition tangentielle de* H_3. — Nous utilisons une définition tangentielle de la courbe à partir du cercle tritangent (ou inscrit). A étant un point fixe du cercle C, de centre O et de rayon R, *on a la tangente générale en joignant un point* M *de* C *à un point* P *tel que* $\overset{\frown}{AP} = -2\overset{\frown}{AM}$ où les arcs sont évalués à un multiple près de la circonférence C. Chaque point de C peut être considéré comme un point M ou comme un point P; par un point M passe une seule tangente de H_3, par un point P, deux tangentes rectangulaires; *en tout, par chaque point de* C, *passent trois tangentes de* H_3 *dont deux sont rectangulaires.*

Les symétriques des points M, P par rapport à l'axe OA vérifient également la relation $2\overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{AP} = 0$; cette relation ne change pas de forme si l'on prend

(1) *Journ. Math. spéciales*, 1884, p. 226.
(2) *Journ. Crelle*, 1864, p. 106.

comme nouvelle origine sur C l'un des points A_1, A_2 qui forment avec A un triangle équilatéral; donc H_3 admet trois axes de symétrie OA, OA_1, OA_2 et se reproduit par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de O.

Si $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$, la droite indéfinie Δ, bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ est caractérisée par

$$(OA, O\Delta) = \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})\right] = -\frac{\alpha}{2} \pmod{\pi};$$

or, MP est perpendiculaire à Δ, donc $(OA, MP) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$, ce qui prouve que H_3 *possède une tangente unique parallèle à une direction donnée*. A une tangente quelconque MP, on peut associer une tangente perpendiculaire unique qui la coupe en P sur le cercle inscrit : *le cercle* C *est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe*.

Une H_3 est parfaitement définie par le cercle C et une tangente MP particulière à condition de distinguer les points M et P de rencontre avec C. En effet, les trois sommets A, A_1, A_2 s'obtiennent à partir de l'égalité $2\widehat{AM} + \widehat{AP} = 0$, c'est-à-dire par la division des arcs MP en trois arcs égaux.

Si deux tangentes MP et M_1P_1 se coupent en Q (*fig.* 1), les deux triangles MQP, et M_1QP sont isoscèles, les angles en Q, P ou P_1 de ces triangles ayant même mesure. Le point M_1' diamétralement opposé à M_1 donne la tangente P_1M_1' perpendiculaire à P_1M_1 ; le point Q' où P_1M_1' coupe MP donne $MQ' = MQ = MP_1$: donc *le milieu du segment découpé par deux tangentes rectangulaires variables sur* MP *est fixe; c'est le point* M *de cette tangente fixe.*

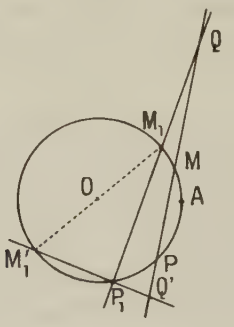


Fig. 1.

Si l'on fait tendre M_1 vers M et P_1 vers P, le point de contact T de MP avec H_3 est tel que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MT}$.

L'enveloppe obtenue *peut être engendrée par un point d'un cercle de rayon* R *roulant sans glisser sur un cercle fixe de centre* O *et de rayon* 3R : en effet, T est situé sur le cercle C' symétrique de C par rapport à M; avec le même sens de

parcours sur C′ que sur C, on a $\widehat{MT} = \widehat{MP} = -3\widehat{AM}$ et, si M′ est diamétralement opposé à M sur C′,

$$\widehat{TM'} = \widehat{TM} + \widehat{MM'} = \pi R + 3\widehat{AM} = 3\widehat{\sigma M},$$

où σ est défini sur C par $\widehat{\sigma A} = \frac{\pi R}{3}$. Appelons S l'homologue de σ sur le cercle Γ homothétique de C par rapport à O dans le rapport 3; Γ est tangent à C′ en M′; on a $\widehat{SM'} = 3\widehat{\sigma M} = \widehat{TM'}$, la proposition en résulte.

Le point A, considéré comme M donne P coïncidant avec A : H_3 est tangente à C en A (et en A_1 et A_2); A considéré comme P donne deux tangentes rectangulaires, l'une tangente à C en A déjà trouvée, l'autre correspondant à M diamétralement opposé à A, touchant H_3 en S_1 à la distance 4R de A dans la direction AO, S_1 est un point de rebroussement de H_3; H_3 se reproduisant par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de O, a trois points de rebroussement S, S_1, S_2 situés sur Γ.

3. *Tangentes concourantes.* — Appliquons les résultats précédents au problème : *étant donné un point* Q *sur une tangente* MP *de* H_3, *trouver les autres tangentes à* H_3 *issues de* Q.

De M comme centre, avec MQ pour rayon, traçons un cercle Ω qui coupe C en P_1 et P_2 (*fig.* 2). De P_1 sont issues deux tangentes rectangulaires qui coupent MP, l'une en Q, l'autre en Q′ symétrique de Q par rapport à M. De même, de P_2 sont issues deux tangentes rectangulaires P_2Q, P_2Q'. Les deux nouvelles tangentes issues de Q sont donc QP_1 et QP_2.

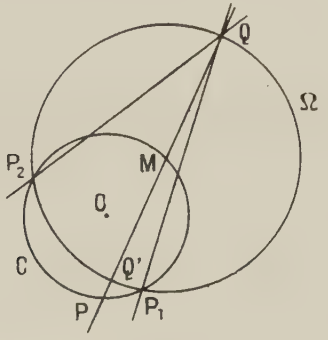


Fig. 2.

Pour que ces tangentes existent, il faut et il suffit que C et Ω se coupent, c'est-à-dire que le rayon MQ de Ω soit inférieur au diamètre 2R de C. Si Q tend vers l'un des points $\overline{Q}$, $\overline{Q'}$ définis par $M\overline{Q} = M\overline{Q'} = 2R$, les deux points P_1 et P_2 viennent se confondre avec le point $\overline{P}$ de C diamétralement opposé à M, les deux tangentes QP_1, QP_2 se confondent, donc $\overline{Q}$ et Q' sont les points de ren-

contre de la tangente MP avec H_3. Les tangentes à H_3 en ces points sont les deux droites rectangulaires $\overline{P}\overline{Q}$ et $\overline{P}\overline{Q}'$.

Nous avons ainsi fait apparaître des propriétés importantes :

a. H_3 *est de classe* 3 *et de degré* 4 ;

b. la longueur du segment intercepté par H_3 *sur une tangente quelconque est constante et égale à* 4R, *où* R *désigne le rayon du cercle tritangent.*

Nous verrons au paragraphe 6 que les trois arcs SS_1, S_1S_2, S_2S limités aux points de rebroussement ont leur convexité tournée vers le centre O du cercle inscrit. Une tangente MP dont le point de contact T est sur l'arc SS_2 recoupe la courbe en deux points Q, Q′ situés sur les arcs SS_1 et S_1S_2 (*fig.* 3). Considérons

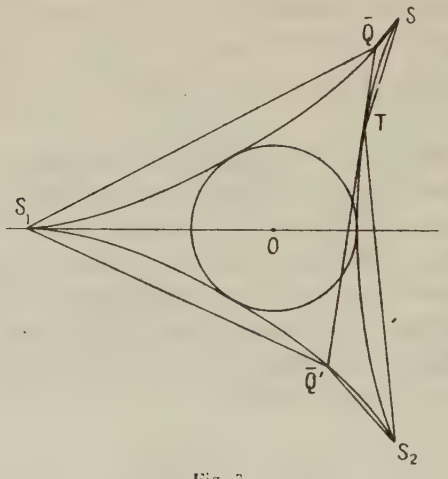


Fig. 3.

les triangles $S_1Q\overline{Q}'$, SQT et $S_2Q'T$ et imaginons qu'une droite Δ se déplace parallèlement à MP en coupant la courbe, donc l'un au moins des triangles précédents. Puisque la convexité de chaque arc est tournée vers l'intérieur de la courbe, si Δ coupe $S_1Q\overline{Q}'$, le segment découpé par la courbe est plus court que celui découpé par le triangle, donc plus court que $\overline{Q}Q'$. De même, si Δ coupe SQT ou $S_2Q'T$ chaque segment découpé par la courbe est inférieur à $\overline{Q}T$ ou à $Q'T$, et par suite, à $Q\overline{Q}'$, c'est-à-dire à 4R.

Si nous considérons le domaine $\mathcal{D}$ fermé intérieur à H_3, on ne peut y placer aucun segment de longueur supérieure à 4R. On y trouve une infinité de segments ayant la longueur 4R; chacun est tangent à la frontière et les extrémités en sont elles-mêmes sur la frontière. Remarquons que le domaine fermé limité par deux cercles concentriques jouit d'une propriété analogue, mais cette fois la frontière n'est plus d'un seul tenant et les deux cercles qui la constituent jouent des rôles différents.

Si Q est le point de concours des trois tangentes MP, M_1P_1, M_2P_2 (*fig.* 2), nous venons de voir que M est le centre du cercle circonscrit au triangle QP_1P_2 : les trois tangentes jouant évidemment le même rôle, M_1 et M_2 sont les centres des cercles circonscrits aux triangles QP_2P et QPP_1 respectivement ; la médiatrice de PQ porte donc les points M_1 et M_2, d'où une autre construction des tangentes issues de Q; de même les médiatrices de QP_1 et QP_2 sont les droites M_2M et MM_1. La perpendiculaire en P à MP est aussi tangente à H_3, elle rencontre en Q_1 et Q_2 les droites M_1P_1 et M_2P_2, M_1 et M_2 sont les milieux des côtés QQ_1 et QQ_2; le cercle C qui passe par M_1, M_2 et P est le cercle des neuf points du triangle QQ_1Q_2; Q' symétrique de Q par rapport à M est l'orthocentre de ce triangle; $Q'P_1$ et $Q'P_2$ sont deux hauteurs. H_3 *est tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle* QQ_1Q_2.

Nous déterminerons un point M_i sur C par la mesure de l'angle $\alpha_i = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_i})$. Nous nous proposons de trouver la relation exprimant que les tangentes correspondant à α, α_1, α_2 sont concourantes. Pour obtenir les nouvelles tangentes à H_3 issues d'un point Q de MP, prenons les points M_1, M_2 où la médiatrice de PQ coupe C; ces tangentes existent à la seule condition que Q soit intérieur au segment $\overline{QQ'}$ découpé par H_3 sur MP. Donc, pour que les tangentes correspondant à des points M_1 et M_2 du cercle C concourent avec une tangente particulière MP, il faut et il suffit que la corde M_1M_2 soit perpendiculaire à MP, ou, ce qui est équivalent, que les bissectrices des angles $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ soient perpendiculaires. Ceci donne

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \qquad (\text{mod. } \pi),$$

c'est-à-dire

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

La tangente M'P perpendiculaire à MP forme avec M_1P_1 et M_2P_2 un triangle dont les côtés et les hauteurs sont tangents à H_3. Or, M' est sur C, diamétralement opposé à M, autrement dit $\alpha = \alpha' + \pi$; *la relation qui caractérise un tel triangle est*

$$\alpha' + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \qquad (\text{mod. } 2\pi),$$

A une H_3, *on peut associer* ∞^2 *triangles présentant la disposition signalée.*

Les relations que nous venons d'établir entraînent des conséquences simples. Dans la première, si α a une valeur constante, α_1 et α_2 ont une somme constante, donc *lorsque le point* Q *décrit une tangente* MP, *les bissectrices des angles formés par les deux nouvelles tangentes à* H_3 *issues de* Q *ont des directions fixes, celles des tangentes à* H_3 *aux points* Q *et* Q' *où* MP *recoupe* H_3. De même, dans la deuxième formule, fixons α' : les deux angles α_1 et α_2 ont encore une somme constante, donc *dans les* ∞^1 *triangles admettant la droite* M P *pour un de leurs côtés et dont les côtés et les hauteurs sont tangents à* H_3, *les bissectrices de l'angle*

opposé au côté M'P *ont des directions fixes.* Inversement, si $\alpha_1 + \alpha_2 = C$, où C désigne une constante, les tangentes correspondantes concourent sur une tangente fixe (T) de paramètre $\alpha = \pi - C$ et la tangente (T') perpendiculaire à (T) forme avec les tangentes (α_1), (α_2) un triangle dont les hauteurs sont aussi tangentes à H_3.

M. Gambier (1) a étudié les triangles MM_1M_2 inscrits dans un cercle et caractérisés par la relation $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \text{const.}$; ces triangles sont dits *en position isogonale*. Nous reconnaissons alors que, si M, M_1, M_2 sur le cercle C correspondent à trois tangentes concourantes, le triangle MM_1M_2 est en position isogonale avec le triangle symétrique par rapport à O du triangle AA_1A_2 formé par les sommets de H_3; de même, si M', M_1, M_2 correspondent à trois tangentes formant un triangle dont les hauteurs et les côtés sont tangents à H_3, le triangle $M'M_1M_2$ est en position isogonale avec le triangle AA_1A_2.

La relation $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \pmod{2\pi}$, qui caractérise les ∞^2 systèmes de trois tangentes concourantes peut, suivant Laguerre, être ainsi interprétée : *la somme des angles comptés depuis une direction fixe jusqu'à trois tangentes concourantes de* H_3 *est constante.* Nous avons vu, en effet, que l'angle (Ox, MT) orienté de droites indéfinies est $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ (α est défini à 2π près); pour les trois tangentes concourantes, la somme est π, ou plus simplement zéro. (Ox est la direction d'une tangente de rebroussement.)

Réciproquement, si une courbe de classe 3 *donne pour la somme en jeu, une valeur fixe, c'est une* H_3. D'abord, *on ne pourra mener à cette courbe qu'une tangente de direction donnée :* s'il en existait plus d'une, il y en aurait deux ou peut-être trois; envisageons alors deux tangentes parallèles T_1, T_2, puis un autre couple semblable Θ_1, Θ_2; de chaque point (T_i, Θ_j) serait issue une troisième tangente, de même direction dans les quatre cas : il y aurait donc des systèmes de quatre tangentes parallèles, d'où contradiction. La courbe est donc *unicursale*. En changeant l'orientation de la direction origine, on peut supposer la somme des angles nulle; la tangente T parallèle à cette direction origine est évidemment un axe de symétrie; en son point de contact, une nouvelle tangente se confond avec T, donc aussi la troisième : T est donc tangente de rebroussement. Il y a deux tangentes inclinées à $\pm \frac{\pi}{3}$ sur T, chacune est un nouvel axe de symétrie et tangente de rebroussement; les trois points de rebroussement sont disposés aux sommets d'un triangle équilatéral. La courbe est nécessairement de degré 4, car si l'on prend une tangente quelconque t, aux points où cette tangente recoupe la courbe, la tangente ne peut être que l'une ou l'autre de deux tangentes rectangulaires (on connaît le double de l'angle compté de la direction origine vers une telle tangente); donc il n'y a que deux points d'intersection autres que le point de contact et les tangentes y sont rectangulaires. La

(1) Triangles en position isogonale (*Bull. Soc. Math. France*, 70, 1942, p. 31-39).

courbe étant de classe 3 et degré 4, coïncide nécessairement avec l'H_3 qui a les mêmes points de rebroussement.

En examinant la propriété démontrée plus loin au paragraphe 9, on verrait de même le résultat suivant : *soit une courbe telle que le triangle formé par trois tangentes donnant une valeur constante (donnée a priori) à la somme des angles déjà indiquée, ait un cercle circonscrit de rayon constant : cette courbe est une* H_3.

4. *Nouvelle génération tangentielle de* H_3. *Droites de Simson.* — Du théorème de M. Hadamard nous pouvons déduire une autre génération tangentielle de H_3. Soient un cercle C, deux droites perpendiculaires Px, Py issues d'un point P de ce cercle, Px coupant C en M, Py en M_1 ; *si une droite* QQ′ *varie de sorte que le milieu m du segment* QQ′ *déterminé sur elle par* Px *et* Py *soit un point de* C, QQ′ *enveloppe une* H_3 *tritangente à* C.

Il y a une H_3 et une seule qui admet C pour cercle inscrit, Px et Py pour tangentes particulières; de chaque point *m* de C, jouant le rôle de M, est issue une seule tangente à H_3, coupant Px et Py en Q, Q′ et le segment QQ′ admet *m* pour milieu ; d'autre part, étant donné un point *m* du plan, il n'existe qu'une droite *m*QQ′, issue de *m* telle que *m* soit milieu de QQ′. La propriété est alors évidente. Vérifions-la par un raisonnement direct qui donnera d'ailleurs la position des sommets de H_3 ; pour cela, désignons par *p* le deuxième point de rencontre de *m*QQ′ avec C (*fig.* 4); O étant le centre de C l'égalité des angles de

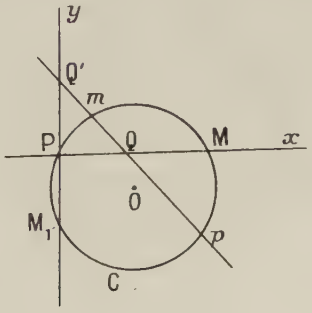


Fig. 4.

droites (PQ, P*m*), (Q*m*, QP) entraîne, par la considération des angles doubles

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Om}) = (\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OP}) \qquad (\text{mod. } 2\pi)$$

et, en ajoutant de part et d'autre $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Om})$

$$2(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Om}) = (\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Om}) + (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{OP}).$$

Désignons par A l'un des sommets de l'H_3 définie par le cercle C et les tangentes particulières Px, Py; retranchons aux deux membres les quantités

égales $2(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$ nous obtenons

$$2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Om}) = (\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{OA}),$$

relation caractéristique entre les points m et p d'une tangente à l'H_3 considérée. (Au paragraphe 2, nous avions déjà montré que l'égalité $2(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$ définit A par trisection de l'arc MP.)

Les points de contact T et T_1 de Px et Py avec H_3 s'obtiennent en doublant PM et PM_1. Le segment découpé par Px et Py sur une tangente variable mQQ' est égal à $2Pm$; il reste compris entre O et 4R, la valeur maximum 4R étant obtenue quand m est diamétralement opposé à P sur C, la tangente correspondante n'étant autre que la droite qui joint T_1 et T_2. Px et Py sont deux tangentes rectangulaires quelconques de H_3 et nous retrouvons un résultat déjà obtenu : *un couple de tangentes rectangulaires de* H_3 *a son sommet sur le cercle inscrit, le segment qui joint les points de contact a pour longueur* 4R *et il est lui-même tangent à* H_3.

Cette génération tangentielle permet de démontrer que toutes les droites de Simson relatives à un triangle ABC enveloppent une H_3. Soit un triangle ABC, d'orthocentre H (*fig.* 5); si P est le pied de la hauteur issue de A, A_1 le point de

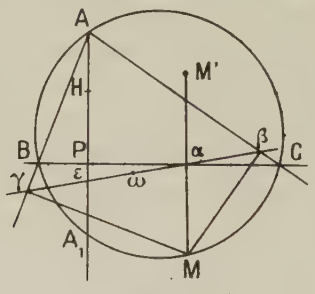


Fig. 5.

rencontre de cette hauteur avec le cercle circonscrit, on a $\overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{PH}$. Soit M un point du cercle circonscrit, α, β, γ ses projections sur les côtés du triangle; les quadrilatères inscriptibles $\alpha M\gamma B$ et ABA_1M donnent

$$(\alpha\gamma, \alpha M) = (B\gamma, BM) = (BA, BM) = (A_1A, A_1M) = (M\alpha, MA_1).$$

Donc $\alpha\gamma$ et A_1M ont des directions symétriques par rapport à αM (ou BC); même conclusion pour les droites $\alpha\beta$ et A_1M, ce qui prouve que α, β, γ sont alignés. M' étant le symétrique de M par rapport à BC, HM' est symétrique de A_1M, donc parallèle à la droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ ou encore homothétique de

cette droite par rapport à M, dans le rapport 2(¹). Si l'on appelle ε le point où la droite de Simson coupe AP, la figure HM'αε est un parallélogramme,

$$\varepsilon\vec{H} = \alpha\vec{M'} = \vec{M\alpha};$$

donc HαMε est un parallélogramme, αε et HM se coupent en leur milieu ω dont le lieu, quand M varie, est le cercle des neuf points de ABC. *La droite de Simson rencontre* BC, AP *en deux points* α, ε *tels que le milieu de* αε *soit sur le cercle des neuf points; elle enveloppe l'*H_3 *ayant pour cercle tritangent le cercle des neuf points de* ABC, *et tangente à* BC *et* AH. Par raison de symétrie, cette H_3 est tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs de ABC; le côté BC est la droite de Simson du point diamétralement opposé au sommet A, et la hauteur AH est droite de Simson de A; nous verrons plus loin qu'il existe ∞^1 H_3 tangentes à BC, CA, AB et que c'est l'enveloppe des droites de Simson qui donne l'H_3 de plus petite dimension.

5. *Enveloppe des asymptotes d'un faisceau linéaire d'hyperboles équilatères.* — Signalons le théorème suivant : *l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle* ABC *est l'hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux côtés et aux hauteurs du triangle* ABC. Ces hyperboles passent toutes par l'orthocentre H du triangle, le lieu de leur centre est le cercle Γ des neuf points du triangle ABC; trois d'entre elles sont dégénérées en un côté de ABC et la hauteur correspondante. Les deux asymptotes Px, Py de l'une de ces hyperboles se coupent en un point P de Γ; le milieu de AB (ou CH) est aussi le milieu du segment découpé sur AB (ou CH) par Px, Py; donc l'H_3 définie par Γ comme cercle tritangent et les tangentes particulières Px, Py est tangente à AB (ou CH) et par raison de symétrie, à BC, CA, AH, BH; elle coïncide avec l'H_3 enveloppe des droites de Simson de ABC et toutes les hyperboles en jeu ont pour asymptotes des tangentes de H_3.

6. *Développée de* H_3. — Le point de contact T (*fig.* 6) de la tangente MP est défini par $\vec{MT} = \vec{PM}$. Soit M' diamétralement opposé à M sur C, PM' est une autre tangente à H_3, dont nous désignons le point de contact par T'. La normale en T à H_3 est parallèle à PT'; la médiatrice de MP est parallèle à ces deux droites, elle passe par O et coupe MP en son milieu μ; l'homothétie de centre O et de rapport (— 3) transforme PT' en la normale en T à H_3, *la développée est la transformée de* H_3 *dans cette homothétie*. Si Θ est le centre de courbure en T et θ

(¹) Cette démonstration de l'existence de la droite de Simson Δ et du fait que la parallèle à Δ menée par H est à la distance double de M a été donnée autrefois par M. Schmidt. Les deux faits sont établis simultanément par une méthode assez élégante pour mériter d'être signalée incidemment.

le point de rencontre de OT avec PT′, on a $\overrightarrow{T\Theta} = -3\overrightarrow{\theta T'}$. Or, le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle MM′P donne

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} \cdot \frac{\overline{\theta M'}}{\overline{\theta P}} \cdot \frac{\overline{TP}}{\overline{TM}} = +1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\overline{\theta M'}}{\overline{\theta P}} = -\frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{\theta T'} = \overrightarrow{\theta M'} + \overrightarrow{M'T'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{PM'}, \qquad \overrightarrow{T\Theta} = -4\overrightarrow{PM'}.$$

En tout point de l'un des trois arcs SS_1, S_1S_2, S_2S de la courbe, la convexité est toujours tournée du côté de O; PM′ est le double de la distance de O à PM; donc *le rayon de courbure en* T *est égal à huit fois la distance du centre du*

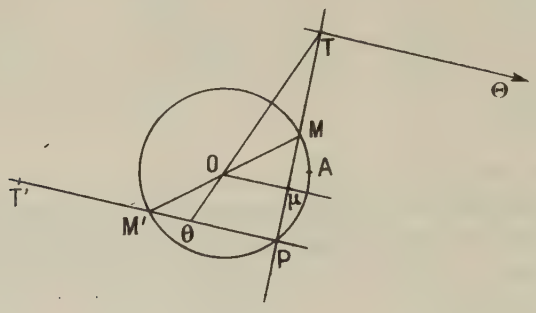


Fig. 6.

cercle inscrit à la tangente en ce point. PM′ est nul lorsque M correspond à une tangente de rebroussement, Θ est alors confondu avec T qui est en S par exemple, point de rebroussement de H_3 et sommet de la développée. Supposons que, sur la développée, le point Θ appartienne à l'arc de sommet S; l'arc de développée SΘ égal à 4PM′ est l'homothétique d'un arc A_2T' sur H_3. Donc, l'arc A_2T' a une longueur égale à $\frac{4}{3}$ PM′, de même arc $AT = \frac{4}{3}$ PM; α variant de o à $\frac{\pi}{3}$, PM varie de o à 2R et le point T décrit un arc AS de H_3, de longueur $\frac{8R}{3}$. La courbe complète comporte six arcs égaux à AS, elle a pour longueur 16R.

7. H_3 *tangentes à trois droites.* — Montrons qu'*il y a* ∞^1 H_3 *tangentes à trois droites données et une seule tangente à quatre droites données,* ces droites étant de directions différentes.

Prenons trois droites Θ, T, T_1 et supposons d'abord que *deux d'entre elles,* Θ, T *soient rectangulaires;* désignons par P leur point de rencontre, par Q_1 et Q_1' les points de rencontre de T et Θ avec T_1, par M_1 le milieu de Q_1Q_1'. La médiatrice de PM_1 est le lieu du centre ω d'un cercle C passant par P et M_1 : chacun de ces cercles fournit une H_3 demandée.

Supposons maintenant que le triangle formé par les trois droites T, T_1, T_2 ne soit pas rectangle. Montrons que, si nous choisissons arbitrairement une

droite Θ perpendiculaire à T au point variable P (*fig.* 7), il existe une H_3 et une seule tangente à T, T_1, T_2, Θ ; en effet, soient Q_1, Q'_1 les points où T_1 rencontre T et Θ, Q_2, Q'_2 les points analogues fournis par T_2 ; les milieux M_1, M_2 de $Q_1Q'_1$, $Q_2Q'_2$ déterminent avec P un cercle C tritangent à une H_3 cherchée.

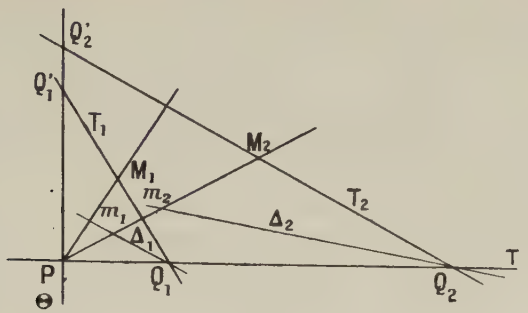


Fig. 7.

P variant sur T, les droites PM_1, PM_2 conservent chacune sa direction ; le milieu m_1 de PM_1 décrit une droite Δ_1 issue de Q_1, le milieu m_2 de PM_2 décrit une droite Δ_2 issue de Q_2 ; m_1 et m_2 décrivent sur Δ_1 et Δ_2 des divisions semblables à celle que P décrit sur T, les médiatrices de PM_1, PM_2 ont encore des directions fixes, de sorte que le lieu du centre O de C est une droite.

8. H_3 *tangente à quatre droites.* — Donnons-nous maintenant quatre droites. *Premier cas.* — Deux d'entre elles, T et Θ, sont rectangulaires ; le raisonnement précédent donne l'unique H_3 tangente aux quatre droites T, T_1, T_2, Θ.

Cas général. — Il n'existe aucun couple de droites rectangulaires parmi les droites données T, T_1, T_2, T_3. Prenons une droite Θ perpendiculaire à T et cherchons comment il faut choisir son pied P sur T pour que les médiatrices de PM_1, PM_2, PM_3 soient concourantes, auquel cas P, M_1, M_2, M_3 seront sur un même cercle C, tritangent à une H_3 tangente aux quatre droites ; le point O de concours des médiatrices de PM_1, PM_2 décrit, quand P varie, une droite ; de même pour le point de concours des médiatrices de PM_1, PM_3 ; en montrant que ces droites ne sont ni parallèles ni confondues, on peut conclure à l'existence d'une seule H_3 répondant à la question. Mais les directions de ces droites n'étant pas simples, nous emploierons une méthode un peu différente.

Soit deux axes rectangulaires fixes Px, Py. Supposons que le système invariable T, T_1, T_2, T_3 glisse dans le plan, T glissant sur Px ; chaque position du système fournit une H_3 tangente à Py, T, T_1, T_2 et une autre H'_3 tangente à Py, T, T_1, T_3 ; montrons qu'il y a une position unique pour laquelle H_3 et H'_3 coïncident.

Pour cela, cherchons le lieu du centre ω du cercle tritangent à H_3, tangente à Py, T, T_1, T_2. Appelons φ_i l'angle des droites indéfinies (T, T_i) de sorte que

(Px, PM_i) a aussi φ_i pour l'une de ses déterminations. Exprimons que le point ω de coordonnées a, b se projette orthogonalement sur PM_1 au milieu m_1 de ce segment. On a

$$\overline{Pm_1} = a\cos\varphi_1 + b\sin\varphi_1 \qquad \text{d'où} \qquad \overline{PM_1} = 2(a\cos\varphi_1 + b\sin\varphi_1).$$

La projection de M_1 sur Px est le milieu de PQ_1, donc

$$\overline{PQ_1} = 4(a\cos\varphi_1 + b\sin\varphi_1)\cos\varphi_1 \tag{1}$$

et, comme vérification, on constate que le résultat ne change pas quand on remplace φ_1 par $\varphi_1 + \pi$. De même

$$\overline{PQ_2} = 4(a\cos\varphi_2 + b\sin\varphi_2)\cos\varphi_2$$

et, par soustraction

$$\overline{Q_1Q_2} = 4\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\,[a\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - b\cos(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$a\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - b\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\overline{Q_1Q_2}}{4\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{2}$$

C'est l'équation de la droite lieu de ω dans le plan Pxy. Pour le lieu de ω', centre de H'_3 tangente à Py, T, T_1, T_3, on a l'équation

$$a\sin(\varphi_1 + \varphi_3) - b\cos(\varphi_1 + \varphi_3) = \frac{\overline{Q_1Q_3}}{4\sin(\varphi_1 - \varphi_3)}. \tag{3}$$

Ces deux droites ont des directions différentes; a et b sont calculés de façon unique; ensuite, (1) détermine $\overline{PQ_1}$ et l'unique H_3 tangente aux quatre droites données en résulte.

Étudions sans calcul les lieux des points ω et ω' lorsque le système des quatre droites glisse sur le plan Pxy. Cherchons plutôt le lieu du point O diamétralement opposé à P sur le cercle PM_1M_2, homothétique de ω dans l'homothétie de centre P, et de rapport 2. Q_1Q_2 glissant sur Px, le point M_1 décrit sur la droite Px_1, $(T, Px_1) = \varphi_1$, une division (M_1) semblable à celle que Q_1 décrit sur T (*fig.* 8); de même, M_2 sur la droite Px_2 définie par $(T, Px_2) = \varphi_2$ décrit une

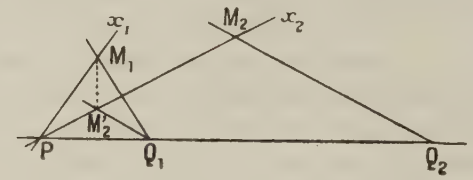


Fig. 8.

division (M_2) semblable à celle de Q_2; Q_1 et Q_2 décrivent des divisions égales, donc les divisions (M_1) et (M_2) sont semblables. Soit π le centre de la similitude (M_1, M_2). Considérons une position quelconque du système T, T_1, T_2 et les points M_1 et M_2; par Q_1, menons la parallèle à T_2 qui coupe Px_2 en M'_2. Q_1 variant, le

triangle $PM_1M'_2$ reste semblable à lui-même : la correspondance (M_1, M'_2) est la similitude de centre P, de module $\frac{PM'_2}{PM_1} = \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$ et d'argument $\varphi_2 - \varphi_1$; la correspondance (M'_2, M_2) est une translation, puisque le vecteur $\overrightarrow{M'_2M_2}$ est la projection sur Px_2, parallèlement à T_2, du vecteur constant $\overrightarrow{Q_1Q_2}$; un vecteur quelconque de la figure (M_1) a pour homologues dans les figures (M'_2) et (M_2) des vecteurs équipollents, donc les similitudes (M_1, M'_2) et (M_1, M_2) ont le même module et le même argument et les triangles $PM_1M'_2$ et πM_1M_2 sont directement semblables. L'égalité $(PM_1, PM_2) = (\pi M_1, \pi M_2)$ (mod. π) prouve que P, π, M_1, M_2 sont sur un même cercle; sur ce cercle le point O est diamétralement opposé à P et la perpendiculaire élevée en π sur $P\pi$ est une droite fixe, lieu du point O. Pour trouver la position du centre π, déplaçons T_1 et T_2 de façon que leur point commun vienne sur Py (*fig.* 9); les deux triangles

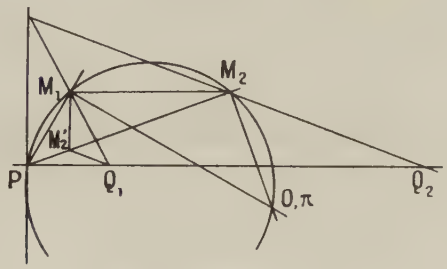


Fig. 9.

$PM_1M'_2$ et OM_1M_2 sont alors directement semblables car leurs côtés homologues sont perpendiculaires, donc le point π n'est autre que le point O fourni par cette figure spéciale; la droite, lieu du point variable O est la tangente en π au cercle spécial PM_1M_2 qui est le cercle des neuf points du triangle TT_1T_2. On retrouve tous les résultats qui apparaissaient par l'interprétation de l'équation (2) : l'angle de Px avec la droite (2) est $\varphi_1 + \varphi_2$, ce qui exprime que la droite (2) est parallèle à la tangente en P au cercle des neuf points du triangle TT_1T_2 dans la position particulière considérée et la distance de P à la droite (2) est égale au rayon du cercle des neuf points.

On remarquera que le cercle tritangent à une H_3 tangente à T, T_1, T_2 a pour diamètre le segment PO dont le minimum est $P\pi$. Donc, *de toutes les* H_3 *tangentes à* T, T_1, T_2, *la plus petite est celle dont le cercle tritangent est le cercle des neuf points du triangle* TT_1T_2, *c'est-à-dire l'enveloppe des droites de Simson du triangle*.

L'étude précédente permet de résoudre le problème suivant : étant donné un triangle TT_1T_2, trouver une H_3 de grandeur donnée (dont le cercle inscrit a un rayon donné ρ) tangente aux trois côtés du triangle. En procédant comme on vient de faire, on connaîtrait la distance $PO = 2\rho$; si $2\rho > P\pi$ on aurait deux positions de O symétriques par rapport à π; de O, on déduirait M_1 et M_2 d'où les positions cherchées des droites T_1 et T_2.

9. *Cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes de* H_3. — Nous retrouverons certains des résultats précédents en étudiant le triangle $Q_{20}Q_{01}Q_{12}$ formé par trois tangentes quelconques de H_3, MP, M_1P_1, M_2P_2 (*fig.* 10). L'angle

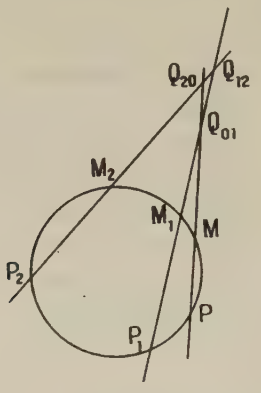


Fig. 10.

(M_1P_1, MP) ou $(Q_{01}Q_{12}, Q_{01}Q_{20})$ défini en grandeur et en signe à $k\pi$ près est égal à $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha)$, comme l'angle (M_2M, M_2M_1),

$$(M_1P_1, MP) = (M_2M, M_2M_1).$$

De même,

$$(M_2P_2, M_1P_1) = (MM_1, MM_2),$$

donc *les triangles* $Q_{12}Q_{20}Q_{01}$ *et* MM_1M_2 *sont directement semblables*. Le rapport de similitude est le rapport de $Q_{01}Q_{02}$ à M_1M_2 ou le rapport des rayons des cercles circonscrits. Or

$$MQ_{01} = MP_1 = 2R\left|\sin\frac{\alpha + 2\alpha_1}{2}\right|.$$

En choisissant sur MP un sens positif convenable, nous aurons

$$\overline{MQ_{01}} = 2R\sin\frac{\alpha + 2\alpha_1}{2}.$$

(Ce sens positif sera celui de P vers M, aussi celui de M vers le point de contact de la tangente MP si $\sin\frac{3\alpha}{2}$ est positif, le sens contraire, si $\sin\frac{3\alpha}{2}$ est négatif.)

De même

$$\overline{MQ_{02}} = 2R\sin\frac{\alpha + 2\alpha_2}{2}$$

et

$$\overline{Q_{01}Q_{02}} = 2R\left(\sin\frac{\alpha + 2\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha + 2\alpha_1}{2}\right) = 4R\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

$$Q_{01}Q_{02} = 4R\left|\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2}\right|.$$

Par ailleurs

$$M_1M_2 = 2R\left|\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right|.$$

Le rapport de similitude est donc $2\left|\cos\frac{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}{2}\right|$ et le rayon du cercle circonscrit au triangle $Q_{12}Q_{20}Q_{01}$ a pour valeur $2R\cos\left|\frac{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}{2}\right|$. Notons que si l'on change α en $\alpha+2\pi$, ni le triangle circonscrit, ni le triangle MM_1M_2 ne change, mais $\cos\frac{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}{2}$ change de signe.

Nous retrouvons la condition $\alpha+\alpha_1+\alpha_2=\pi \pmod{2\pi}$ exprimant que les tangentes issues de M, M_1, M_2 concourent ; de même la condition

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2=0 \pmod{2\pi}$$

qui correspond au cas où H_3 touche les côtés et les hauteurs du triangle $Q_{12}Q_{20}Q_{01}$ exprime que le rayon du cercle circonscrit à ce triangle formé par trois tangentes a la valeur maximum 2R.

Ce résultat montre que si un cercle Γ quelconque du plan a un rayon ρ supérieur au diamètre 2R du cercle tritangent, il n'existe aucun triangle réel inscrit dans Γ et circonscrit à H_3 ; si $\rho=0$, Γ se réduit à son centre ω et il y a une solution unique, formée par les tangentes à H_3 issues de ω ; si $\rho=2R$, il y a encore une solution unique : du centre de similitude directe H de Γ et C, on mène les tangentes à H_3 et les tangentes perpendiculaires à celles-ci donnent l'unique triangle cherché (réel si H est à l'intérieur de H_3). Si $\rho<2R$, un système de tangentes formant une solution doit d'abord satisfaire à l'équation

$$2\cos\frac{\alpha+\alpha_1+\alpha_2}{2}=\pm\frac{\rho}{R},$$

ce qui revient à écrire à 2π près.

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2=u \qquad \text{ou} \qquad \alpha+\alpha_1+\alpha_2=-u,$$

où u est un argument connu. $u=0$, $u=\pi$ correspondent aux deux cas spéciaux qui viennent d'être signalés. A un triangle $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ circonscrit à H_3, nous pouvons associer le triangle $(-\alpha, -\alpha_1, -\alpha_2)$ symétrique par rapport à l'un des axes de symétrie OA de H_3 : les deux séries de triangles correspondant à

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2=u \qquad \text{et} \qquad \alpha+\alpha_1+\alpha_2=-u$$

sont formées de triangles deux à deux symétriques par rapport à OA.

Le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes à H_3 correspondant aux angles $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ liés par la relation $\alpha+\alpha_1+\alpha_2=u$, où u est donné, est

$$\rho=2R\left|\cos\frac{u}{2}\right|.$$

Étant donné un tel triangle, si nous remplaçons chaque angle α par $\alpha+\pi$ pour avoir la tangente perpendiculaire, u est remplacé par $u+3\pi$ et $\frac{u}{2}$ par $\frac{u}{2}+\frac{3\pi}{2}$ ou, ce qui est équivalent, par $\frac{u}{2}-\frac{\pi}{2}$; le nouveau rayon ρ' vérifie

$$\rho'=2R\left|\sin\frac{u}{2}\right|,$$

on a donc

$$\rho\rho'=4R^2,$$

ce qui a été obtenu pour $u=0$, $u=\pi$ ($\rho=0$, $\rho'=2R$).

Ce qui précède permet d'obtenir toutes les H_3 inscrites dans un triangle donné T : en effet, par des similitudes, on peut ramener le problème au suivant : *circonscrire à une* H_3 *donnée un triangle directement semblable à un triangle donné;* il suffit d'inscrire dans le cercle tritangent C un triangle MM_1M_2 directement semblable au triangle donné T et de tracer les tangentes à H_3 issues des points M, M_1, M_2 considérés comme points M; on fait glisser le système invariable des trois points M, M_1, M_2 sur le cercle C, autrement dit on remplace les angles α, α_1, α_2 par $\alpha+h$, α_1+h, α_2+h où h désigne un angle quelconque; le triangle des trois tangentes issues de M, M_1, M_2 reste directement semblable à lui-même; H_3 se reproduisant par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de son centre O, il suffit de faire varier h dans un un intervalle d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$, puis de faire subir à la série des triangles obtenus deux rotations successives de $\frac{2\pi}{3}$ autour de O pour avoir tous les triangles cherchés. Parmi les triangles d'une série, celui qui est le plus petit correspond à

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2-3h=\pi \pmod{2\pi};$$

et se réduit à un point, celui qui a la dimension maximum correspond à

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+3h=0 \pmod{2\pi}$$

entre ces deux extrêmes, il y a pour chaque taille, deux triangles solutions correspondant à des valeurs de h telles que

$$\alpha-\alpha_1+\alpha_2-3h=u \quad \text{et} \quad \alpha+\alpha_1+\alpha_2+3h=2\pi-u.$$

On obtient enfin toutes les H_3 inscrites dans le triangle T en prenant chaque triangle t de la série étudiée et faisant la similitude transformant t en T; on trouve ainsi ∞^1 H_3; celle qui a la plus petite dimension est tangente aux côtés et aux hauteurs de T; pour toute dimension supérieure, on trouve deux H_3 inscrites.

Pour obtenir *une* H_3 *tangente à quatre droites données*, formant le quadrilatère complet Q, on procédera ainsi : on mènera à une H_3 particulière quatre tan-

gentes formant une figure q directement semblable à Q, puis la similitude transformant q en Q donnera l'H_3 cherchée. Plaçons (*fig.* 11) deux droites rectangulaires Ox, Oy de façon que Oy soit parallèle à un côté du quadrilatère Q, traçons le cercle unité C de centre O, et désignons par A le point d'abscisse 1 sur Ox; considérons l'H_3 de cercle tritangent C, de sommet A:

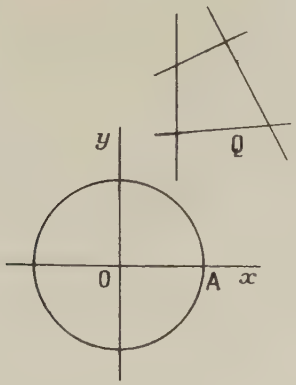


Fig. 11.

menons à cette H_3 les tangentes parallèles aux côtés de Q, soient o, α_1^0, α_2^0, α_3^0, les abscisses curvilignes des points M relatifs à ces tangentes, en adoptant des notations telles que

$$0 < \alpha_1^0 < \alpha_2^0 < \alpha_3^0 < 2\pi.$$

Le quadrilatère cherché q, semblable à Q sera formé par les tangentes à H_3 correspondant à des valeurs du paramètre α de la forme

$$\alpha_0 = h,\ \alpha_1 = \alpha_1^0 + h,\ \alpha_2 = \alpha_2^0 + h,\ \alpha_3 = \alpha_3^0 + h.$$

On peut supposer $h = \alpha_0 < \frac{2\pi}{3}$. En orientant la tangente M_0P_0 de paramètre α_0, de P_0 vers M_0, on a

$$\overline{M_0Q_{10}} = 2\sin\frac{\alpha_0 + 2\alpha_1}{2},$$

de même

$$\overline{M_0Q_{20}} = 2\sin\frac{\alpha_0 + 2\alpha_2}{2},$$

$$\overline{Q_{10}Q_{20}} = 4\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

$$\overline{Q_{10}Q_{30}} = 4\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3}{2}.$$

La donnée du quadrilatère Q fournit le rapport

$$\frac{\overline{Q_{10}Q_{20}}}{\overline{Q_{10}Q_{30}}} = m \quad 0$$

et l'on trouve l'équation

$$\frac{\sin\dfrac{\alpha_2^0-\alpha_1^0}{2}\cos\dfrac{3h+\alpha_1^0+\alpha_2^0}{2}}{\sin\dfrac{\alpha_3^0-\alpha_1^0}{2}\cos\dfrac{3h+\alpha_1^0+\alpha_3^0}{2}}=m,$$

qui donne $\operatorname{tg}\frac{3h}{2}$, d'où h à 2π près.

Le rapport précédent ne change pas si l'on augmente de 2π l'un des angles α_1^0, α_2^0, α_3^0.

L'étude faite à partir d'un triangle T permettrait aussi de trouver toutes les H_3 tangentes à deux droites données T_1 et T_2, le point de contact de T_1 étant donné; de même, l'étude faite pour le quadrilatère Q permettrait de construire l'H_3 tangente à deux droites T_1 et T_2, les points de contact avec T_1 et T_2 étant donnés.

10. *Triangles admettant les mêmes droites de Simson.* — Nous avons montré au paragraphe 4 que les droites de Simson relatives à un triangle ABC enveloppent une H_3 dont le cercle inscrit est le cercle des neuf points du triangle de base, et dans le paragraphe 3, que, à une H_3 quelconque, on peut associer ∞^2 triangles dont les côtés et les hauteurs sont tangents à H_3, c'est-à-dire admettant H_3 pour enveloppe de leurs droites de Simson. Nous venons enfin de trouver qu'il existe une H_3 unique tangente à quatre droites données, T, T_1, T_2, T_3. Donc :

Étant donné quatre droites T, T_1, T_2, T_3 *de directions différentes, il existe toujours* ∞^1 *triangles admettant ces droites pour droites de Simson; tous ces triangles ont le même cercle des neuf points; toute droite de Simson de l'un d'eux est droite de Simson pour les autres.*

11. *Définition de certaines courbes unicursales qui ne sont pas courbes de direction.* — Si nous fixons sur une normale de H_3 un sens positif et si nous nous déplaçons sur H_3 de façon à parcourir toute la courbe, la demi-normale positive étant suivie par continuité, *nous reviendrons au point de départ avec changement de sens sur cette demi-normale. Cependant les cosinus directeurs de la demi-normale peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre, en même temps que les coordonnées du point courant;* en effet, en prenant l'origine des coordonnées au centre du cercle tritangent, Ox joignant ce centre à l'un des trois sommets de H_3, puis prenant le rayon de ce cercle pour unité de longueur, l'équation de la tangente MP est $x\cos\frac{\alpha}{2}-y\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}=0$ et les coordonnées du point de contact T, obtenu en écrivant $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{PM}$ sont

$$x=2\cos\alpha-\cos 2\alpha,\quad y=2\sin\alpha+\sin 2\alpha,$$

de sorte que les coordonnées de T s'expriment rationnellement en $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; or, en

fonction de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, les paramètres directeurs $\cos\frac{\alpha}{2}$, $-\sin\frac{\alpha}{2}$ de la normale sont irrationnels; ce n'est qu'en prenant $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ comme nouveau paramètre que les cosinus directeurs deviennent rationnels et pour revenir au point de départ avec le même sens positif, il faut avoir parcouru deux fois la courbe. Toute courbe unicursale, telle que l'équation de la tangente générale puisse être ramenée à la forme $y - tx - f(t) = 0$, où $f(t)$ est une fraction rationnelle en t, jouit évidemment de la même propriété et est la courbe unicursale la plus générale de ce type.

Dans le même ordre d'idées, à une courbe *plane* C unicursale quelconque, $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, où f et φ sont des fractions rationnelles en t, nous pouvons faire correspondre, par les formules $t = \mathrm{F}(\theta)$, $z = \psi(\theta)$, où F et ψ sont des fractions rationnelles, une nouvelle courbe *gauche* Γ, $x = f[\mathrm{F}(\theta)]$, $y = \varphi[\mathrm{F}(\theta)]$, $z = \psi(\theta)$, dont la projection sur le plan $z = 0$ est la courbe C parcourue p fois, p étant le degré de $\mathrm{F}(\theta)$ par rapport à θ. Pour le cas de H_3, il est intéressant de prendre $p = 2$; les formules $x = 2\cos\alpha - \cos 2\alpha$, $y = 2\sin\alpha + \sin 2\alpha$ seront complétées par une formule

$$z = \mathrm{F}\left(\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

où F est une expression rationnelle en $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ et nous aurons une courbe unicursale où le paramètre unicursal sera $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$; si, de plus, F admet la *demi-période* 2π, la courbe Γ aura le plan $x\mathrm{O}y$ comme plan de symétrie. Or, notre étude élémentaire nous donne deux exemples particulièrement simples : nous avons vu, au paragraphe 6, que l'arc de H_3 peut être pris égal à

$$\frac{4}{3}\,\mathrm{PM} \text{ ou } \frac{8}{3}\sin\frac{3\alpha}{2};$$

donc, si k est une constante numérique quelconque, les formules

$$x = 2\cos\alpha - \cos 2\alpha \qquad y = 2\sin\alpha + \sin 2\alpha \qquad z = k\sin\frac{3\alpha}{2}$$

définissent *une hélice unicursale dont* H_3, *parcourue deux fois est la projection horizontale*. D'ailleurs la puissance du point de contact T de la tangente MP de H_3 par rapport au cercle C est, d'une part $x^2 + y^2 - 1$, d'autre part

$$\overline{\mathrm{TM}}\cdot\overline{\mathrm{TP}} = 2\overline{\mathrm{MP}}^2 = 8\sin^2\frac{3\alpha}{2};$$

en prenant $k = 2\sqrt{2}$, l'hélice en jeu sera située sur l'hyperboloïde à une nappe $z^2 = x^2 + y^2 - 1$.

Si maintenant on calcule z_1 par la formule $z_1^2 + z^2 = 8$ de façon que z_1 soit égal à $2\sqrt{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$, on aura $z_1^2 = 9 - x^2 - y^2$; la nouvelle courbe unicursale

$$x = 2\cos\alpha - \cos 2\alpha, \qquad y = 2\sin\alpha + \sin 2\alpha, \qquad z_1 = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\alpha}{2},$$

sera tracée sur la sphère de centre O et rayon 3, contenant les trois points de rebroussement de H_3.

Quelle que soit la valeur de k, les cosinus directeurs de la tangente à l'hélice que nous avons indiquée,

$$\frac{8}{\sqrt{64 + 9k^2}}\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{8}{\sqrt{64 + 9k^2}}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{3k}{\sqrt{64 + 9k^2}}$$

sont exprimés rationnellement au moyen du même paramètre que les coordonnées (x, y, z).

RECHERCHES

SUR LE

FLAMBEMENT DES POUTRES DROITES

A

SECTION CONSTANTE ET A MOMENT D'INERTIE VARIABLE

PAR M. FLORIN VASILESCO.

Introduction.

L'emploi, dans les constructions, de poutres de grandes dimensions, constituées généralement par un assemblage de cornières (la section de la poutre est, de ce fait, constante) implique leur dotation d'un moment d'inertie variable. La résistance au flambement leur permet ainsi de supporter de grandes charges et de transmettre des efforts considérables.

La théorie du flambement des poutres droites à moment d'inertie constant est connue : la formule d'Euler

$$F_0 = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

détermine la charge critique F_0.

Mais aucune étude d'ensemble n'existe, à ma connaissance, sur les poutres à moment d'inertie variable. Quelques lois particulières de variation de ce moment ont seulement été envisagées (1).

Le but de ce travail est d'exposer les principes d'une méthode générale pour l'étude des problèmes posés par l'emploi des poutres droites à section constante et à moment d'inertie variant suivant une loi quelconque.

Quelques problèmes seulement, choisis parmi les plus courants, ont été considérés à titre d'exemples. Mais ils permettent d'apprécier l'efficacité de la

(1) *Voir* A. CAQUOT, *Leçons sur la résistance des matériaux* (*Ministère de l'Air*, p. 249-250).

méthode. La rigueur des raisonnements conduit à des résultats précis; les charges critiques ont des expressions analogues à celles d'Euler, mais avec des coefficients différents dont le calcul exact, inutile d'ailleurs dans la pratique, fait appel à la théorie des fonctions de variable complexe. Les mathématiques pourront trouver dans ce nouveau contact avec le concret, l'occasion et l'aliment de nouvelles recherches théoriques.

Étude préliminaire.

Nécessité et choix d'une variable intrinsèque. — Toute poutre chargée AB est en général fléchie et comprimée. Si M est un point de sa fibre moyenne, il peut être repéré de trois façons : 1° poutre à l'état de repos, par son abscisse $AM = s$; 2° poutre fléchie et comprimée, par son abscisse curviligne $AM = \sigma$; 3° fibre moyenne fléchie et comprimée en projection sur la corde AB, par l'abscisse $Am = x$. La première façon permet la définition du moment d'inertie variable avec M. La seconde indique la compression subie. La troisième introduit le fléchissement par l'équation $y = y(x)$ de la fibre déformée. Il est *essentiel*, à cause de la variabilité du moment d'inertie, d'*individualiser* chaque point de la fibre moyenne. Comment passer de l'une à l'autre de ces trois variables ?

S'agit-il d'une poutre chargée de bout, ou soumise en outre à une charge unitaire constante en chacun de ses points et normale à sa fibre moyenne, ou chargée de bout et soumise à l'action d'un moment de flexion appliqué, variable avec l'abscisse x, la relation

$$s = \sigma + \int_0^\sigma \frac{F}{ES} \cos\theta \, d\sigma$$

est toujours valable. θ désigne l'inclinaison de la fibre déformée Γ sur la corde AB, F la charge de bout, E le module de Young et S la section droite de la poutre. Mais F, E, S sont des constantes et $\cos\theta \, d\sigma = dx$, d'où

$$s = \sigma + \frac{F}{ES} x. \tag{1}$$

Si L, Σ, l sont les longueurs de la fibre moyenne au repos, de Γ et de la corde AB,

$$L = \Sigma + \frac{F}{ES} l, \tag{2}$$

d'où la combinaison

$$2s - L = 2\sigma - \Sigma + \frac{F}{ES}(2x - l). \tag{3}$$

L'introduction des variables numériques croissantes de -1 à $+1$ pour un parcours de A à B

$$u = \frac{2s}{L} - 1, \qquad v = \frac{2\sigma}{\Sigma} - 1, \qquad w = \frac{2x}{l} - 1 \tag{4}$$

transforme (3) en

$$\mathrm{L}\,u = \Sigma\, v + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{ES}}\, l w. \tag{5}$$

Cette équation admet la solution $u = v = w$. Retranchée de l'égalité (2) après multiplication par u des deux membres, elle devient

$$0 = \Sigma\,(u - v) + \frac{\mathrm{F}\,l}{\mathrm{ES}}\,(u - w). \tag{6}$$

Mais la fibre moyenne subit en tout point M un effort normal à la section de la poutre de compression constant; son raccourcissement unitaire est donc invariable avec M et par suite

$$\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{s}{\mathrm{L}},$$

d'où (4) $u = v$ et (6) $u = w$ est *unique*.

Ainsi : *chacune des trois quantités* s, σ, x *s'exprime en fonction de la variable sans dimension* u, *croissant de* -1 *à* $+1$ *pour le parcours de* A *à* B.

Le passage recherché s'effectue par l'intermédiaire de u, prise pour variable intrinsèque.

Le moment d'inertie de la poutre au point $\mathrm{M}(u)$ peut alors s'écrire sous la forme

$$\mathcal{I}(u) = \mathrm{I}_0\,\mathrm{I}(u),$$

où $\mathrm{I}(u)$ est une fonction numérique *positive, jamais nulle, égale à* 1 *pour* $u = 0$ *et* I_0 le moment d'inertie au milien O de la poutre.

Sauf indication contraire, $\mathrm{I}(u)$ *est supposée fonction paire de* u : $\mathrm{I}(u)$ est *symétrique* par rapport à O.

CHAPITRE I.

POUTRE CHARGÉE DE BOUT.

La fibre moyenne déformée Γ (1) est rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires $\mathrm{A}x$, $\mathrm{A}y$ situés dans son plan. Son équation est de la forme

$$y = \mathrm{V}(u) = \mathrm{V}\left(\frac{2x}{l} - 1\right) = y(x),$$

d'où

$$y''(x) = \frac{4}{l^2}\,\mathrm{V}''(u). \tag{7}$$

(1) La courbe Γ est supposée plane selon l'usage établi.

La condition d'équilibre de la poutre s'écrit

$$\frac{1}{\rho} = \frac{F|y|}{E\mathfrak{I}}. \tag{8}$$

La courbure $\frac{1}{\rho}$ de Γ a pour expression

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\pm y''(x)}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais, dans la théorie de la résistance des matériaux, y'^2 est toujours supposé négligeable devant l'unité; cette hypothèse se traduira donc par une inégalité *nécessaire* à la validité du problème.

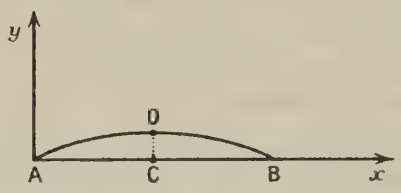


Fig. 1.

Alors (8) s'écrit

$$|y''(x)| = \frac{F|y|}{E\mathfrak{I}},$$

$y''(x)$ et $y(x)$ s'annulent simultanément : les points d'inflexion de Γ sont donc ses intersections avec la corde AB et entre deux tels points consécutifs la concavité est tournée vers AB. Par suite, y et y'' sont de signes contraires, d'où l'équation de l'équilibre élastique

$$y''(x) = -\frac{Fy(x)}{E\mathfrak{I}}. \tag{9}$$

Déformations paires de la fibre moyenne : courbes Γ *symétriques par rapport à* OC (C milieu de AB).

La recherche de $y(x)$ est ramenée à celle de la fonction paire $V''(u)$ désignée par $\varphi(u)$. D'après (7),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{l}\int_0^u \varphi(u)\,du, \tag{10}$$

car $y'(x)$ est impaire, et

$$y(x) = \int_{-1}^{u} du \int_0^u \varphi(u)\,du, \tag{11}$$

car $y(x)$ est paire; de plus, $y = 0$ pour $u = \pm 1$. L'équation (9) devient

$$I(u)\varphi(u) + \frac{Fl^2}{4EI_0}\int_{-1}^{u} du \int_0^u \varphi(u)\,du = 0. \tag{12}$$

Elle détermine $\varphi(u)$.

Une double dérivation donne

$$\frac{d^2[\mathrm{I}(u)\varphi(u)]}{du^2}+\frac{\mathrm{F}l^2}{4\mathrm{E}\,\mathrm{I}_0}\varphi(u)=0. \tag{13}$$

Cette équation différentielle linéaire du second ordre admet des solutions paires et impaires — $\mathrm{I}(u)$ est paire, donc $\varphi(u)$, $\mathrm{I}(u)\varphi(u)$ et $\frac{d^2[\mathrm{I}(u)\varphi(u)]}{du^2}$ sont simultanément paires ou impaires — explicitées plus loin. Son intégrale générale est la somme d'une solution paire particulière $\Phi(u)$, mutipliée par une constante arbitraire C et d'une autre impaire $\psi(u)$, multipliée par une constante C′, car la parité différente de ces solutions en fait un système fondamental.

La fonction cherchée $\varphi(u)$ *est donc de la forme* $\mathrm{C}\Phi(u)$ et doit vérifier l'équation (12), c'est-à-dire, compte tenu de (13), l'équation

$$\mathrm{I}(u)\Phi(u)-\int_{-1}^{u}du\int_{0}^{u}\frac{d^2[\mathrm{I}(u)\Phi(u)]\,du}{du^2}=0$$

ou

$$\mathrm{I}(u)\Phi(u)-\int_{-1}^{u}du\left[\frac{d[\mathrm{I}(u)\Phi(u)]}{du}-\left\{\frac{d[\mathrm{I}(u)\Phi(u)]}{du}\right\}_{u=0}\right]=0.$$

Mais l'accolade est nulle, car $\mathrm{I}(u)\Phi(u)$ est paire, d'où

$$\mathrm{I}(u)\Phi(u)-\mathrm{I}(u)\Phi(u)+\mathrm{I}(-1)\Phi(-1)=0;$$

et comme $\mathrm{I}(-1)\neq 0$,

$$\Phi(1)=0. \tag{14}$$

Cette équation exprime *la nullité de la courbure de* Γ *en* A *et* B; pour la poutre considérée $\mathrm{I}(u)$ est connue et $\Phi(u)$ dépend (13) de

$$\lambda=\frac{\mathrm{F}l^2}{4\mathrm{E}\,\mathrm{I}_0}. \tag{15}$$

L'existence théorique de l'équilibre élastique (flambement) avec une fibre moyenne *déformée* Γ, paire et *non rectiligne* $[\varphi(u)\not\equiv 0]$ a lieu pour les seules valeurs de λ, soient λ_0, racines de l'équation (14). La relation

$$\frac{\mathrm{F}l^2}{4\mathrm{E}\,\mathrm{I}_0}=\lambda_0 \tag{16}$$

détermine l si la charge F est connue ou, inversement, précise la charge nécessaire pour un flambement pair de corde $\mathrm{AB}=l$ donnée. Mais F et l varient en sens inverse; le minimum F_0 de F correspond au maximum L de l et, de plus, F est proportionnel à λ_0, d'où :

La charge la plus grande incompatible avec un flambement pair de la poutre est

$$F_0 = \frac{4\lambda_0 E I_0}{L^2}, \tag{17}$$

où λ_0 est la plus petite racine positive (non nulle) de l'équation (14), explicitée plus loin (23).

C'est la charge critique paire.

La formule (17) ressemble à celle, classique, d'Euler et en diffère par le facteur $4\lambda_0$ à la place de π^2.

Remarque. — Pour toute charge F inférieure à F_0, la fonction $\varphi(u)$ est identiquement nulle et la fibre moyenne subit une compression simple.

Recherche de la fonction $\Phi(u)$. — La substitution

$$I(u)\Phi(u) = X(u) \tag{18}$$

permet d'écrire l'équation (13), multipliée par $I(u)$, sous la forme

$$I(u)X''(u) + \lambda X(u) = 0. \tag{19}$$

Le paramètre λ est, comme $\Phi(u)$, *variable* avec la charge F, d'où l'idée de satisfaire à (19) au moyen d'une série de fonctions *paires*

$$X(u) = X_0(u) + \lambda X_1(u) + \lambda^2 X_2(u) + \dots, \tag{20}$$

sous réserve de vérifier *a posteriori* sa convergence uniforme.

L'annulation des coefficients des diverses puissances de λ livre les équations

$$\begin{aligned} I(u)X_0''(u) &= 0, \\ I(u)X_1''(u) + X_0(u) &= 0, \\ I(u)X_2''(u) + X_1(u) &= 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et il suffit d'en retenir les solutions particulières

$$\begin{cases} X_0(u) = 1, \\ X_1(u) = -\displaystyle\int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)}, \\ X_2(u) = \displaystyle\int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{21}$$

Elles sont alternativement positives et négatives et s'évanouissent pour $u = 0$, sauf la première. Le nombre pair des quadratures superposées assurent leur parité à partir de celle de $I(u)$.

Si k désigne le maximum de $\frac{1}{I(u)}$ elles satisfont, en outre, aux inégalités

$$|X_1(u)| < k\,\frac{u^2}{2!},$$

$$|X_2(u)| < k^2\,\frac{u^4}{4!},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$|X_n(u)| < k^n\,\frac{u^{2n}}{(2n)!},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

obtenues par la considération des seules valeurs positives de u.

Ainsi la série (20) est majorée par la série entière de

$$1 + \frac{\lambda k u^2}{2!} + \frac{\lambda^2 k^2 u^4}{4!} + \dots = \operatorname{ch}\sqrt{\lambda k}\,u. \tag{22}$$

Elle est donc absolument et uniformément convergente et représente une fonction entière de λ pour toute valeur de u.

L'équation (14) s'écrit $X(1) = 0$ et λ_0 *est le zéro réel* (*positif*) *le plus petit de la série entière en* λ

$$1 - \lambda\int_0^1 du\int_0^u \frac{du}{I(u)} + \lambda^2\int_0^1 du\int_0^u \frac{du}{I(u)}\int_0^u du\int_0^u \frac{du}{I(u)} - \dots. \tag{23}$$

Sa recherche, rigoureuse ou approximative, ressortit à la Théorie des fonctions analytiques et s'appuiera, en pratique, sur la rapidité de convergence de la série (23).

La fonction $\Phi(u)$ *a pour expression*

$$\Phi(u) = \frac{1}{I(u)}\left[1 - \lambda_0\int_0^u du\int_0^u \frac{du}{I(u)} + \lambda_0^2\int_0^u du\int_0^u \frac{du}{I(u)}\int_0^u du\int_0^u \frac{du}{I(u)} - \dots\right]. \tag{24}$$

Elle dépend uniquement de $I(u)$, c'est-à-dire de la loi de variation du moment d'inertie de la poutre par rapport à son moment médian.

La fibre moyenne déformée Γ, et son coefficient angulaire dépendent, en plus, d'un facteur C, car

$$y(x) = C\int_{-1}^u du\int_0^u \Phi(u)\,du, \tag{11'}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2C}{l}\int_0^u \Phi(u)\,du. \tag{10'}$$

Pour le déterminer, il suffit d'égaler la longueur Σ de Γ, donnée par la formule (2), où l est connu (16), à son expression analytique tributaire de $y'^2(x)$, donc de C^2. Ainsi, *à toute charge* F, *supérieure à* F_0, *correspond une valeur unique de* l *et une seule déformation paire de la fibre moyenne*, (*à une symétrie près par rapport à la corde* AB).

C dépend de F, L, S, E et I_0 (par l'intermédiaire de l). Mais, chose remarquable, toutes les déformations, *considérées comme fonctions de la variable intrinsèque u*, sont proportionnelles entre elles, indépendamment de u. L'étude de leur allure, diverse selon $I(u)$, se ramène à celle de $\Phi(u)$; son intérêt est surtout théorique.

Cas particulier. — *Moment d'inertie constant.* — Alors $I(u)=1$ et la série (23) exprime $\cos\sqrt{\lambda}$. Par suite $\lambda_0=\frac{\pi^2}{4}$; d'où (17)

$$F_0=\frac{\pi^2 E I_0}{L^2}.$$

C'est la formule d'Euler.

La fonction $\Phi(u)$ devient ici

$$\Phi(u)=\cos\sqrt{\lambda_0}\,u=\cos\frac{\pi u}{2};$$

les seules déformations possibles de la fibre moyenne relatives à des charges F voisines de et supérieures à F_0, sont donc des arcs pairs situés d'un même côté de la corde AB. La courbe Γ a pour équation

$$y=C\int_{-1}^{u}du\int_{0}^{u}\cos\frac{\pi u}{2}\,du=-\frac{4C}{\pi^2}\cos\frac{\pi u}{2}=-\frac{4C}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{2x}{l}-1\right).$$

C'est une demi-sinusoïde. Il n'y a pas lieu de s'arrêter sur le calcul de C.

Déformations impaires de la fibre moyenne : courbes Γ′ *symétriques par rapport à* C (milieu de AB). — La fonction

$$V''(u)=\varphi(u)$$

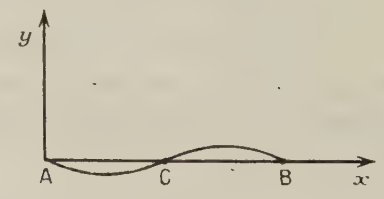


Fig. 2.

est ici impaire [$\varphi(0)=0$] comme $y(x)$ et il résulte de (7),

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{l}\left[\int_0^u\varphi(u)\,du+C\right]$$

et

$$y=\int_0^u du\int_0^u\varphi(u)\,du+C\,u$$

où C a la valeur

$$C = \int_0^{-1} du \int_0^u \varphi(u\,du),$$

car $y = 0$ en A et B. L'équation (9) s'écrit

$$I(u)\varphi(u) + \frac{F l^2}{4 E I_0}\left[\int_0^u du \int_0^u \varphi(u)\,du + Cu\right] = 0. \tag{25}$$

Une double dérivation ramène encore à l'équation différentielle (13), mais $\varphi(u)$, impaire, est de la forme $C'\psi(u)$. La vérification de (25) impose la condition

$$\Psi(1) = 0 \tag{14'}$$

et l'argumentation développée pour le cas pair permet la conclusion :

La charge la plus grande incompatible avec un flambement impair de la poutre est

$$F_1 = \frac{4\lambda_1 E I_0}{L^2}, \tag{26}$$

où λ_1 est la plus petite racine positive (non nulle) de l'équation (14'), explicitée par l'expression (27). *Elle peut être appelée charge critique impaire.*

Le calcul de $\psi(u)$ s'effectue à partir de (18) et (20), mais les fonctions $X_i(u)$ sont impaires

$$X_0(u) = u,$$

$$X_1(u) = -\int_0^u du \int_0^u \frac{u}{I(u)}\,du,$$

$$X_2(u) = \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{u}{I(u)}\,du,$$

.....

La nouvelle série (20) est toujours majorée par (22), car $\frac{u}{I(u)} < k$ et par suite *λ_1 est le zéro (positif) le plus petit de la série entière en λ*

$$1 - \lambda \int_0^1 du \int_0^u \frac{u}{I(u)}\,du + \lambda^2 \int_0^1 du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{u}{I(u)}\,du - \dots \tag{27}$$

La fonction $\psi(u)$ est

$$\Psi(u) = \frac{1}{I(u)}\left[u - \lambda_1 \int_0^u du \int_0^u \frac{u}{I(u)}\,du + \lambda_1^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{u}{I(u)}\,du - \dots\right] \tag{28}$$

Elle dépend de $I(u)$ seulement.

Les considérations développées au sujet du facteur C dans le cas pair s'appliquent également au facteur C'.

Utilité de la notion de charge critique impaire. — Si $I(u)=1$, la série (27) représente $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}$, d'où $\lambda_1=\pi^2$ et

$$F_1=\frac{4\pi^2 E I_0}{L^2}=\frac{\pi^2 E I_0}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}.$$

Pour une poutre à moment d'inertie constant, *la charge critique impaire* est donc le quadruple de la charge critique paire (Euler); *c'est aussi la charge critique classique* (*voir* plus bas) *d'une moitié de la poutre*, résultat évident *a priori*, car toute déformation impaire de la poutre se traduit par une déformation d'une de ses moitiés.

Il n'en est plus ainsi dans le cas général où $I(u)$ *est quelconque :* la poutre et l'une de ses moitiés n'ont plus la même loi de distribution pour leurs moments d'inertie et, d'ailleurs, le moment de la seconde n'est plus symétrique. *La conclusion reste cependant exacte.* En effet, soit AC une poutre droite à moment

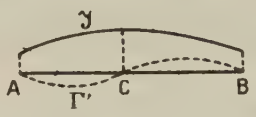


Fig. 3.

d'inertie variable suivant une loi *arbitraire*. Une symétrie par rapport à la base C engendre une nouvelle poutre AB, de longueur 2 AC, à moment d'inertie symétrique (¹).

Si la déformation Γ' de la fibre moyenne de AB sous l'action d'une charge de bout F est impaire, l'ordonnée de C est nulle, la courbure de Γ' en C est nulle et il en est de même du moment de flexion en C. L'effort F, seul, s'exerce donc sur la poutre AC déformée suivant l'arc AΓ'C. La déformation Γ'' symétrique de Γ' par rapport à AB est également possible, comme on l'a vu, et ce sont les seules.

Inversement, si Γ' est la déformation de AC sous l'action de la charge F, la déformation symétrique Γ'' est possible et l'adjonction au bout de AC de la poutre CB déformée suivant Γ'' engendre la poutre AB à déformation impaire. D'où le

Théorème fondamental. — *La charge critique d'une poutre droite à section constante et à moment d'inertie variable suivant une loi quelconque, est la charge*

(¹) La théorie précédente implique l'existence et la continuité de $I''(u)$ en tout point de la poutre. En fait, il suffit de supposer uniquement la continuité de $I(u)$. (*Voir* note p. 266). Le moment d'inertie de la poutre AB est continu en C.

critique impaire de la poutre doublée symétriquement par rapport à l'une de ses bases.

L'expression *charge critique* doit être entendue ici dans le sens *classique*, celui de la pratique courante : la plus grande charge de bout incompatible avec une déformation élastique non rectiligne de la poutre (il ne s'agit plus ici des seules déformations paires ou impaires) ou encore avec un flambement de celle-ci. Pour une poutre à moment d'inertie constant elle correspond aux déformations paires; les impaires donnent une charge critique (impaire) plus grande. Dans certains cas de variation régulière de la fonction paire $I(u)$, l'infériorité numérique de la charge critique paire relativement à l'impaire paraît intuitive; la démonstration mathématique de ce fait implique l'étude comparative des deux zéros λ_0 et λ_1 des fonctions entières (23) et (27). Mais l'examen de cette question d'analyse pure sort du cadre de ce travail.

CHAPITRE II.

POUTRE CHARGÉE DE BOUT, SOUMISE A UNE CHARGE UNITAIRE CONSTANTE EN CHACUN DE SES POINTS ET NORMALE A SA FIBRE MOYENNE.

Soient F la charge de bout et $\frac{P}{L}$ la charge unitaire. Des réactions d'appui égales à $\frac{P}{2}$ doivent être introduites aux points A et B de la poutre déformée, en équilibre élastique. *Il n'est plus question de déterminer une charge critique, mais*

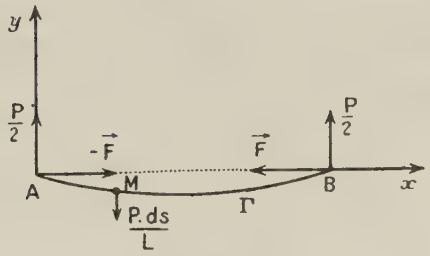


Fig. 4.

le moment de flexion maximum pour la pièce, car la charge unitaire provoque déjà un flambement.

Il est nécessaire de calculer tout d'abord la somme géométrique $\vec{R}$ et le moment résultant $\vec{G}$, en un point M de la fibre moyenne déformée suivant la courbe Γ, des contraintes exercées sur la section transversale de la partie MB. Ces vecteurs sont respectivement égaux à la somme géométrique et au moment résultant en M des forces appliquées sur la partie AM.

Tout d'abord

$$\vec{R} = -\vec{F} + \frac{\vec{P}}{2},$$

d'où l'*effort normal* en M à la section transversale de la poutre

$$\vec{R_N} = \vec{F}.$$

Les quantités infiniment petites par rapport à F et $\frac{P}{2}$ ont été comme d'habitude négligées, car l'arc AB est supposé très tendu.

L'égalité (1) et ses conséquences est donc valable.

L'effort tranchant a pour expression

$$R_T = \frac{P}{2} - P\frac{s}{L} = -\frac{P}{2}\left(\frac{2s}{L} - 1\right) = -\frac{P}{2}u,$$

aux mêmes approximations près. C'est une fonction impaire de u.

Le vecteur $\vec{G}$ mesuré sur l'axe Az normal au plan xAy (trièdre $Axyz$ direct) a pour valeur algébrique

$$G = -x\frac{P}{2} + \frac{x}{2}P\frac{\sigma}{\Sigma} + yF,$$

car $y < 0$, d'où (4)

$$G = -\frac{P}{2}\frac{l}{4}(1-u^2) + yF < 0.$$

et la condition d'équilibre élastique

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{G}{EJ}.$$

L'équation de la déformation Γ est donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{4EJ}\frac{l}{2}(1-u^2) - y\frac{F}{EJ}, \tag{30}$$

puisque

$$\frac{dx^2}{d^2y} > 0.$$

La courbe Γ est *paire;* les formules (10) et (11) s'appliquent et l'équation satisfaite par $\varphi(u)$ devient

$$I(u)\varphi(u) = \frac{Pl^3}{32EI_0}(1-u^2) - \frac{Fl^2}{4EI_0}\int_{-1}^{u} du\int_{0}^{u}\varphi(u)\,du, \tag{31}$$

ou encore

$$\frac{d^2[I(u)\varphi(u)]}{du^2} = -\frac{Pl^3}{16EI_0} - \frac{Fl^2}{4EI_0}\varphi(u). \tag{32}$$

Inversement, une solution $\Phi(u)$ paire de cette dernière équation sera la solution recherchée si elle vérifie l'équation (31), écrite en vertu de (32)

$$I(u)\Phi(u) - \frac{Pl^2}{32EI_0}(1-u^2) = \frac{Pl^2}{16EI_0}\frac{u^2-1}{2} - \int_{-1}^{u}\frac{d[I(u)\Phi(u)]}{du}du - \left(\frac{d[I(u)\Phi(u)]}{du}\right)_{u=0}(u+1).$$

Comme le dernier terme est nul, en tant que valeur pour $u=0$ d'une fonction impaire, il reste

$$I(u)\Phi(u) = I(u)\Phi(u) - I(-1)\Phi(-1)$$

ou, puisque $I(-1)\neq 0$ et $\Phi(-1)=\Phi(+1)$,

$$\Phi(1)=0.$$

En résumé, la solution du problème est la fonction paire $\Phi(u)$, *vérifiant l'équation*

$$\frac{d^2[I(u)\Phi(u)]}{du^2} + \frac{Fl^2}{4EI_0}\Phi(u) + \frac{Pl^3}{16EI_0} = 0 \tag{33}$$

et telle que

$$\Phi(1)=0.$$

Cette dernière égalité exprime ici encore la nullité de la courbe de Γ en A et B.

Recherche de la fonction $\Phi(u)$. — Elle s'effectue par la méthode indiquée au Chapitre I. Si

$$X(u) = I(u)\Phi(u),$$

$X(u)$ est une fonction paire, nulle pour $u=\pm 1$, intégrale de l'équation différentielle

$$I(u)\frac{d^2X(u)}{du^2} + \frac{Fl^2}{4EI_0}X(u) + \frac{Pl^3}{16EI_0}I(u) = 0$$

ou de

$$I(u)X''(u) + \lambda X(u) + hI(u) = 0 \tag{34}$$

avec

$$\lambda = \frac{Fl^2}{4EI_0}, \qquad h = \frac{Pl^3}{16EI_0}.$$

L'intégrale générale de (34) est de la forme

$$X(u) = C_1X_1(u) + C_2X_2(u) + f(u), \tag{35}$$

où $X_1(u)$ et $X_2(u)$ sont respectivement une solution *paire* et une solution *impaire* de l'équation

$$I(u)X''(u) + \lambda X(u) = 0$$

et $f(u)$ une solution *paire* particulière de l'équation (34). Mais puisque $X(u)$ est paire, il faut prendre

$$C_2 = 0.$$

D'autre part, la fonction $X_1(u)$ déjà calculée au Chapitre I, a pour expression

$$(36) \qquad X_1(u) = 1 - \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} - \dots$$

Il suffit donc de chercher celle de $f(u)$ et de lui donner la forme

$$f(u) = f_0(u) + \lambda f_1(u) + \lambda^2 f_2(u) + \dots,$$

où les fonctions du second membre sont paires. Substituée dans l'équation (34), cette série conduit aux équations

$$\begin{aligned} I(u) f_0''(u) + h I(u) &= 0, \\ I(u) f_1''(u) + f_0(u) &= 0, \\ I(u) f_2''(u) + f_1(u) &= 0, \\ &\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\begin{aligned} f_0(u) &= -\frac{h}{2} u^2, \\ f_1(u) &= \frac{h}{2} \int_0^u du \int_0^u \frac{u^2}{I(u)} du, \\ f_2(u) &= -\frac{h}{2} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{u^2}{I(u)} du. \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La série de $f(u)$ est encore uniformément convergente, car si k désigne toujours le maximum de $\frac{1}{I(u)}$, les inégalités suivantes ont lieu

$$\begin{aligned} |f_0(u)| &< \frac{h}{2} u^2, \\ |f_1(u)| &< \frac{h}{2} 2k \frac{u^4}{4!}, \\ |f_2(u)| &< \frac{h}{2} 2k^2 \frac{4^6}{6!}, \\ &\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et par suite

$$|f(u)| < h\left(\frac{u^2}{2!} + \lambda k \frac{u^4}{4!} + \lambda^2 k^2 \frac{u^6}{6!} + \dots\right).$$

La série du second membre est entière.

Ainsi

$$(37)\qquad f(u)=-\frac{h}{2}\left[u^2-\lambda\int_0^u du\int_0^u\frac{u^2}{\mathrm{I}(u)}du+\lambda^2\int_0^u du\int_0^u\frac{du}{\mathrm{I}(u)}\int_0^u du\int_0^u\frac{u^2}{\mathrm{I}(u)}du-\dots\right].$$

Sous une forme abrégée, $f(u)$ s'écrit

$$fu=-\frac{h}{2}g(u),$$

où $g(u)$ désigne la série entre crochets.

Il en résulte

$$\mathrm{X}(u)=\mathrm{C}_1\mathrm{X}_1(u)-\frac{h}{2}g(u).$$

La constante C_1 se détermine par la condition $\mathrm{X}(1)=0$, ou

$$\mathrm{C}_1\mathrm{X}_1(1)-\frac{h}{2}g(1)=0$$

et par conséquent

$$\mathrm{X}(u)=\frac{h}{2}\frac{g(1)\mathrm{X}_1(u)-g(u)\mathrm{X}_1(1)}{\mathrm{X}_1(1)}.$$

Finalement

$$(38)\qquad \Phi(u)=\frac{\mathrm{P}l^3}{32\mathrm{E}\mathrm{J}}\frac{g(1)\mathrm{X}_1(u)-g(u)\mathrm{X}_1(1)}{\mathrm{X}_1(1)}.$$

Telle est la solution recherchée.

Le moment de flexion $\mathrm{G}(u)$ a donc pour expression

$$\mathrm{G}(u)=-\frac{\mathrm{E}\mathrm{J}}{\rho}=-\mathrm{E}\mathrm{J}\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4}{l^2}\mathrm{E}\mathrm{J}\Phi(u)$$

ou

$$(39)\qquad \mathrm{G}(u)=-\frac{\mathrm{P}l}{8}\frac{g_1(1)\mathrm{X}_1(u)-g(u)\mathrm{X}_1(1)}{\mathrm{X}_1(u)}$$

et le problème consiste à rechercher le maximum de sa valeur absolue, car $\mathrm{G}(u)<0$, *ou encore de l'expression* $\mathrm{I}(u)\Phi(u)=\mathrm{X}(u)$. Ce maximum est donné par certaines valeurs de u qui annulent la dérivée

$$(40)\qquad g(1)\mathrm{X}_1'(u)-g'(u)\mathrm{X}_1(1).$$

Parmi elles se trouve la valeur $u=0$ car les fonctions $\mathrm{X}_1'(u)$ et $g'(u)$ sont impaires et s'évanouissent pour cette valeur de u.

Une remarque doit être faite ici. D'après l'expression de y (et pour $\mathrm{F}=0$),

$$(41)\qquad y=-\frac{\mathrm{P}l}{8\mathrm{F}}\left[(1-u^2)-\frac{g(1)\mathrm{X}_1(u)-g(u)\mathrm{X}_1(1)}{\mathrm{X}_1(1)}\right]$$

l'inégalité suivante a nécessairement lieu

$$\frac{g(1)X_1(u)-g(u)X_1(1)}{X_1(1)}>1-u^2>0,$$

car $y\geq 0$ et $G(u)<0$. Sa vérification analytique serait intéressante à faire.

En outre, une distinction semblerait s'imposer pour la première fois entre les cas $F=0$ et $F\neq 0$ à cause de la présence de F au dénominateur de y. Elle n'est qu'apparente car, physiquement, il y a continuité entre ces cas. D'ailleurs, analytiquement, la fonction y tend, pour F décroissant à zéro, vers la valeur de y pour $F=0$. Cela ressort de l'intégrale double donnant y en fonction de $\Phi(u)$. En outre, une vérification directe à partir de la formule (41) est immédiate.

Remarque importante. — Dans ce Chapitre comme dans le premier, la valeur de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ a été supposée négligeable devant l'unité. Mais dans le Chapitre I, cette condition s'est trouvée vérifiée par la détermination même de la constante C, inexistante dans le cas actuel. Une inégalité doit donc être écrite ici pour exprimer la petitesse de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; elle fournit une *relation nécessaire entre les différentes données du problème*, ainsi obtenue

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{l}\frac{dy}{du}=-\frac{P}{4F}\left[2u+\frac{g(1)X_1(u)-g(u)X_1(1)}{X_1(1)}\right]$$

et puisque $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ est maximum pour $u=1$, il faut écrire, pour avoir

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2<\eta,$$

où η est choisi à volonté petit

$$\left[2+\frac{g(1)X_1'(1)-g'(1)X_1(1)}{X_1(1)}\right]^2<\left(\frac{4F}{P}\right)^2\eta. \tag{42}$$

Telle est l'inégalité demandée.

Une nouvelle inégalité résultera de la condition de sécurité imposée par les techniciens aux fins d'interdire au moment de flexion maximum le dépassement d'une certaine limite compatible avec la résistance du matériau utilisé.

Enfin, et malgré le manque d'intérêt pratique, il est utile du point de vue théorique de savoir comment la corde l s'exprime au moyen des données F, P, L, E, I, afin que la résolution du problème soit complète. La longueur Σ de la fibre moyenne déformée est

$$\Sigma=\int_0^l\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^l\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}dx.$$

Il serait incorrect de négliger ici $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ devant l'unité, comme devant l'expression de $\frac{1}{\rho}$

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} = \pm \frac{d^2y}{dx^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\dots\right],$$

où il s'agissait, en fait, de négliger $\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ devant $\frac{d^2y}{dx^2}$, quantité très petite. Mais il n'y a pas grand inconvénient à écrire

$$\Sigma = \int_0^l \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx.$$

La formule (2) prend alors la forme

$$L = \frac{Fl}{SE} + l + \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

ou, par passage à la variable u et compte tenu de la parité de $\left(\frac{dy}{du}\right)^2$

$$L = \frac{F}{SE} l + l + \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{dy}{du}\right)^2 du.$$

Telle est la relation entre l et les données du problème.

Application. Moment d'inertie constant $\mathcal{J} = I_0$. — En ce cas

$$I(u) = 1, \qquad N_1(u) = \cos\sqrt{\lambda}\,u,$$

$$g(u) = 2\left(\frac{u^2}{2!} - \lambda\frac{u^4}{4!} + \lambda^2\frac{u^6}{6!} - \dots\right) = \frac{2}{\lambda}(1-\cos\sqrt{\lambda}\,u),$$

et

$$\Phi(u) = \frac{Pl^3}{32EI_0}\frac{2}{\lambda}\frac{(1-\cos\sqrt{\lambda})\cos\sqrt{\lambda}\,u - \cos\sqrt{\lambda}(1-\cos\sqrt{\lambda}\,u)}{\cos\sqrt{\lambda}}$$

$$= \frac{Pl^3}{16EI_0\lambda}\frac{\cos\sqrt{\lambda}\,u - \cos\sqrt{\lambda}}{\cos\sqrt{\lambda}},$$

par suite

$$G(u) = \frac{Pl}{4\lambda}\frac{\cos\sqrt{\lambda} - \cos\sqrt{\lambda}\,u}{\cos\sqrt{\lambda}} < 0.$$

Le maximum de $-G(u)$ a lieu pour

$$\sin\sqrt{\lambda}\,u = 0$$

soit pour $u = 0$; sa valeur est

$$G_{max} = \frac{PEI_0}{Fl}\frac{1-\cos\sqrt{\frac{Fl}{EI_0}}}{\cos\sqrt{\frac{Fl}{EI_0}}}$$

et il est possible, sans commettre de faute appréciable, de remplacer dans cette expression l par L.

Conclusion. — Dans ce Chapitre a été étudié, en fait, le flambement d'une poutre à moment d'inertie symétrique, comprimée, à laquelle a été appliqué un moment de flexion variant paraboliquement en fonction de l'abscisse x.

Tel est le cas d'une poutre comprimée, placée horizontalement et soumise, en chacun de ses points, à une charge unitaire constante, en plus de son propre poids.

Cependant, les ingénieurs ont l'habitude de se donner non plus les charges appliquées à la poutre, mais les moments de flexion de ces charges. C'est pourquoi, un problème général envisagé sous cet aspect sera étudié au chapitre suivant.

CHAPITRE III.

POUTRE DROITE A MOMENT D'INERTIE VARIABLE, SOUMISE A L'ACTION SIMULTANÉE D'UNE CHARGE DE BOUT ET D'UN MOMENT DE FLEXION VARIABLE AVEC L'ABSCISSE x.

Contrairement à l'hypothèse faite aux deux chapitres précédents, le moment d'inertie de la poutre AB, considérée ici, pourra varier selon une loi quelconque *non nécessairement symétrique*.

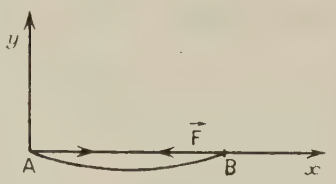


Fig. 5.

Un moment de flexion $G(x)$ variable est également appliqué à cette poutre. Pour fixer les idées, il sera supposé *nul en* A *et négatif*, par rapport à un système d'axes $Axyz$ direct, figurés par les plans Axy et Axz.

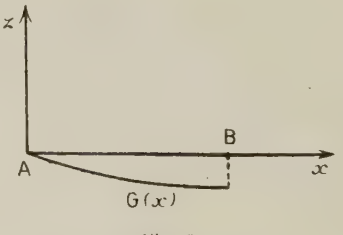


Fig. 6.

Ce moment de flexion est dû à des charges variables appliquées à la poutre et dirigées, en chacun de ses points, suivant la direction négative de Ay : elles

n'ont donc pas de composante suivant l'axe Ax. Seule la charge de bout F est appliquée suivant Ax.

La fibre moyenne de la poutre se déformera donc suivant une courbe Γ d'ordonnée négative; sa concavité sera du côté des y positifs.

L'équation de l'équilibre élastique de la fibre moyenne est alors

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{G(x) + yF}{EJ}$$

la dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}$ est positive et *nulle* en A, car $G(o) = o$ et $y = o$ en ce point. La courbure de la poutre est donc nulle en A; elle ne l'est pas en B.

L'étude de ce problème s'appuiera sur *l'artifice mathématique* suivant.

Soient AC, m' et Γ' les symétriques par rapport à A du segment AB, d'un quelconque de ces points m et de la courbe Γ. Les fonctions $\mathcal{J}(m')$ et $G(m')$ seront définies par les égalités

$$\mathcal{J}(m') = \mathcal{J}(m), \qquad G(m') = -G(m).$$

La courbe totale $\Gamma' + \Gamma$ est continue, a une tangente continue et une courbure continue, cette dernière étant nulle en A.

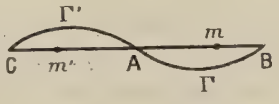


Fig. 7.

Tout se passe donc du point de vue mathématique comme s'il s'agissait d'une poutre CB, de longueur $L_1 = 2L$, à moment d'inertie $\mathcal{J}$ *symétrique*, à laquelle serait appliqué un moment de flexion *impair*, la déformation de la fibre moyenne étant *impaire*.

Pour cette poutre les relations

$$s_1 = \sigma_1 + \frac{F}{ES}\int_0^{\sigma_1} \cos\theta \, d\sigma_1$$

et

$$\frac{2s_1}{L_1} - 1 = \frac{2\sigma_1}{\Sigma_1} - 1 = \frac{2x_1}{l_1} - 1 = u \qquad (-1 \leq u \leq 1),$$

où s_1, σ_1, x_1, L_1, Σ_1, l_1 ont des significations analogues à celles du début de ce travail, sont encore valables. Ainsi, le moment d'inertie de la poutre pourra se mettre sous la forme

$$\mathcal{J} = I_0 I(u),$$

I_0 étant sa valeur en A et $I(u)$ une fonction paire. De plus, le moment de flexion appliqué sera désigné, pour des raisons d'homogénéité, par

$$G(x) = -FG(u),$$

où $G_1(u)$ est une fonction impaire. L'ordonnée y de la fibre moyenne déformée $\Gamma' + \Gamma$ sera donc une fonction impaire de u, positive sur CA et nulle en C, A, B. Une fonction impaire $\varphi(u)$ négative sur CA pourra encore être définie par la relation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{l_1^2}\varphi(u)$$

d'où il résultera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{l_1}\left[\int_0^u \varphi(u)\,du + C\right] \qquad \text{(paire)}$$

et

$$y = \int_0^u du \int_0^u \varphi(u)\,du + Cu \qquad \text{(impaire)}$$

avec

$$\int_0^{-1} du \int_0^u \varphi(u)\,du - C = 0.$$

L'équation de l'équilibre élastique s'écrit alors sous la forme

$$I(u)\varphi(u) + \frac{Fl_1^2}{4EI_0}\left[G_1(u) + \int_0^u du \int_0^u \varphi(u)\,du + Cu\right] = 0.$$

Pour trouver la fonction $\varphi(u)$ il faudrait dériver deux fois cette équation mais il n'est pas certain, *a priori*, que la dérivée seconde de cette fonction soit continue pour $u = 0$ (en A), à moins d'introduire l'hypothèse $G_1''(0) = 0$. Il est possible de s'en passer et de procéder directement en écrivant l'équation sous la forme (1)

$$I(u)y''(u) + \frac{Fl_1^2}{4EI_0}y(u) + \frac{Fl_1^2}{4EI_0}G_1(u) = 0,$$

où les trois termes seront des fonctions *impaires*. Le remplacement du coefficient de $y(u)$ par λ permet d'écrire cette équation ainsi

$$I(u)y''(u) + \lambda y(u) + \frac{Fl_1^2}{4EI_0}G_1(u) = 0,$$

et d'exprimer son intégrale générale par

$$y(u) = C_1 y_1(u) + C_2 y_2(u) + Y(u),$$

où $y_1(u)$ et $y_2(u)$ sont respectivement des solutions paire et impaire particulières de l'équation privée du troisième terme et $Y(u)$ une solution impaire particulière de l'équation entière. Le caractère impair de $y(u)$ exige $C_1 = 0$. La fonction $y_2(u)$, déjà calculée au chapitre I, est exprimée par la série entre crochets de la formule (28) où λ_1 est remplacé par λ.

(1) Ce procédé de résolution est applicable aussi aux équations (12), (25) et (31). Les résultats sont évidemment les mêmes mais impliquent seulement la continuité de $I(u)$. La condition $\Phi(1) = 0$ sera remplacée par $y(1) = 0$.

Le calcul de $Y(u)$ se fait par la méthode utilisée dans ce travail en posant

$$Y(u) = Y_0(u) + \lambda Y_1(u) + \lambda^2 Y_2(u) + \dots,$$

et en écrivant, après substitution et identification,

$$\begin{aligned} &I(u)\,Y_0''(u) + \frac{F l_1^2}{4 E I_0} G_1(u) = 0, \\ &I(u)\,Y_1''(u) + Y_0(u) = 0, \\ &I(u)\,Y_2''(u) + Y_1(u) = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

d'où résultent les choix

$$\begin{aligned} Y_0(u) &= -\frac{F l_1^2}{4 E I_0} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)}\, du = -\lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)}\, du, \\ Y_1(u) &= \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)}\, du, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Les fonctions $Y_0(u)$, $Y_1(u)$, ... sont impaires et alternativement positives et négatives pour $0 < u < 1$.

Ainsi

$$(43)\qquad Y(u) = -\lambda \left[\int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)}\, du - \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)}\, du + \dots \right],$$

la série étant majorée par la série entière

$$M k \left(\frac{u^2}{2!} + \lambda k \frac{u^4}{4!} + \lambda^2 k^2 \frac{u^6}{6!} + \dots \right),$$

où k a la signification antérieure et $M > |G_1(u)|$.

$y(u)$ sera nulle pour $u = 1$ si

$$y(1) = C_2 y_2(1) + Y(1) = 0,$$

d'où

$$C_2 = -\frac{Y(1)}{y_2(1)}$$

et par suite

$$(44)\qquad y(u) = \frac{Y(u)\,y_2(1) - Y(1)\,y_2(u)}{y_2(1)}.$$

Telle est la solution recherchée : elle est unique (1). *Le moment de flexion total a pour expression*

$$\mathcal{G}(u) = -\frac{y_2(1)\,Y''(u) - Y(1)\,y_2''(u)}{y_2(1)}\, E J \frac{4}{l_1^2}.$$

(1) Analytiquement cela est évident car toute solution impaire de l'équation avec second membre se compose de $Y(u) + C_2 y_2(u)$, où C_2 est choisi convenablement. Le remplacement de $Y(u)$ par cette expression dans (44) ou (45) ne change pas la valeur de $y(u)$.

Compte tenu des valeurs

$$Y''(u) = -\lambda \frac{G_1(u) + Y(u)}{I(u)},$$

$$y_2''(u) = -\lambda \frac{y_2(u)}{I(u)},$$

il vient

$$\frac{l_1^2}{4 E I_0 I(u)} \mathcal{G}(u) = -\lambda \frac{y_2(1) G_1(u) + y_2(1) Y(u) - Y(1) y_2(u)}{I(u) y_2(1)}$$

et par remplacement de l'expression de λ

$$\mathcal{G}(u) = F \frac{y_2(1) G_1(u) + y_2(1) Y(u) - Y(1) y_2(u)}{y_2(1)}. \tag{45}$$

Cette formule est apparentée à celle (39) du cas parabolique et la généralise. Elle est à considérer pour $0 \leq u \leq 1$.

Applications. — M. Caquot (1) a donné les expressions des moments de flexion totaux dans les deux cas envisagés ci-après. Elles peuvent être retrouvées comme cas particuliers de cette formule générale.

Poutres à moment d'inertie constant I_0.

Premier cas. — *Moment appliqué constant* M_0. — Les notations employées dans ce chapitre permettent d'écrire

$$G(x) = M_0 = F G_1(u),$$

d'où

$$G_1(u) = \frac{M_0}{F}$$

et de plus

$$I(u) = 1.$$

Ensuite

$$y_2(u) = u - \lambda \frac{u^3}{3!} + \lambda^2 \frac{u^5}{5!} - \ldots = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\, u),$$

$$Y(u) = -\lambda \frac{M_0}{F} \left[\frac{u^2}{2!} - \lambda \frac{u^4}{4!} + \lambda^2 \frac{u^6}{6!} - \ldots \right] = \frac{M_0}{F} \left[\cos(\sqrt{\lambda}\, u) - 1 \right],$$

d'où

$$\mathcal{G}(u) = M_0 \frac{\sin\sqrt{\lambda} + \left[\cos(\sqrt{\lambda}\, u) - 1\right] \sin\sqrt{\lambda} - \left[\cos\sqrt{\lambda} - 1\right] \sin(\sqrt{\lambda}\, u)}{\sin\sqrt{\lambda}}$$

$$= M_0 \frac{\sin\left[\sqrt{\lambda}(1-u)\right] + \sin(\sqrt{\lambda}\, u)}{\sin\sqrt{\lambda}} = M_0 \frac{2 \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cos\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(1-2u)\right]}{2 \sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}$$

$$= M_0 \frac{\cos\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(1-2u)\right]}{\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}.$$

(1) *Loc. cit.*, p. 256.

Mais si x et u' sont l'abscisse et la variable intrinsèque sur la poutre AB, alors

$$\frac{2x}{l} - 1 = u' = 2u - 1$$

et, d'autre part, selon la notation de M. Caquot, l'abscisse x' doit être comptée à partir du milieu de la poutre. Ainsi

$$x = \frac{l}{2} + x'.$$

d'où

$$\frac{2x}{l} - 1 = \frac{2x'}{l} = 2u - 1.$$

Par ailleurs

$$\lambda = \frac{F l_1^2}{4 E I_0} = \frac{F l^2}{E I_0},$$

et comme la charge critique est celle d'Euler

$$F_0 = \frac{\pi^2 E I_0}{l^2},$$

il vient

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{F}{F_0}}\,\pi,$$

d'où

$$\mathcal{G}(u) = M_0 \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{F}{F_0}}\,\frac{\pi x'}{l}\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{F}{F_0}}\,\frac{\pi}{2}\right)}.$$

C'est la première formule de M. Caquot.

Deuxième cas. — *Moment appliqué sinusoïdal de la forme*

$$\underline{M_0 \cos\frac{\pi x'}{l}}.$$

Soit

$$x_1 = l + x = l + \frac{l}{2} + x',$$

d'où

$$G(x_1) = F\,G_1(u) = M_0 \cos\left[\frac{\pi}{l}\left(x_1 - \frac{3l}{2}\right)\right].$$

Mais

$$x_1 - \frac{3l}{2} = x_1 - \frac{2l}{2} - \frac{l}{2} = \frac{2l}{2}\left(\frac{2x_1}{l_1} - 1\right) - \frac{l}{2} = lu - \frac{l}{2}.$$

Par suite,

$$G_1(u) = \frac{M_0}{F}\cos\left[\frac{\pi}{l}\,l\left(u - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{M_0}{F}\cos\left[\pi u - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{M_0}{F}\sin\pi u.$$

Dans cette expression u est positif. De plus

$$I(u) = 1.$$

Il vient donc

$$y_2(u) = u - \lambda \int_0^u du \int_0^u u\,du + \ldots = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, u,$$

$$Y(u) = -\lambda \frac{M_0}{F} \left[\int_0^u du \int_0^u \sin \pi u\, du - \lambda \int_0^u du \int_0^u du \int_0^u du \int_0^u \sin \pi u\, du + \ldots \right]$$

$$= \frac{M_0}{F} \left[\frac{\lambda}{\pi} \int_0^u (\cos \pi u - 1)\, du - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^u du \int_0^u du \int_0^u (\cos \pi u - 1)\, du + \ldots \right]$$

$$= \frac{M_0}{F} \left[\frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{\sin \pi u}{\pi} - u \right) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^u du \int_0^u \left(\frac{\sin \pi u}{\pi} - u \right) du + \ldots \right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il est facile de déduire la loi des quadratures successives. Mais il vaut mieux profiter de l'occasion offerte pour montrer la portée simplificatrice de la remarque faite ci-après. Elle consiste à intégrer directement l'équation génératrice de la fonction $Y(u)$

$$Y''(u) + \lambda Y(u) + \lambda \frac{M_0}{F} \sin \pi u = 0.$$

Une solution impaire particulière est de la forme

$$Y(u) = \beta \sin \pi u,$$

où

$$-\beta \pi^2 + \lambda \beta + \lambda \frac{M_0}{F} = 0,$$

soit

$$\beta = \frac{\lambda \dfrac{M_0}{F}}{\pi^2 - \lambda}.$$

Mais

$$\lambda = \frac{F}{F_0} \pi^2 \qquad (\textit{voir } 1^{er} \textit{ cas}),$$

d'où

$$\beta = \lambda \frac{M_0}{F} \frac{1}{\pi^2 \left(1 - \dfrac{F_0}{F} \right)} \frac{M_0}{F_0 - F}.$$

Ainsi

$$Y(u) = \frac{M_0}{F_0 - F} \sin \pi u \quad (1)$$

---

(1) La fonction $Y(u)$ donnée par la série est égale à l'expression trouvée ici augmentée de

$$-\pi\beta \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, u,$$

c'est-à-dire de $-\pi\beta\, y_2(u)$. L'expression de $\mathcal{G}(u)$ n'est pas changée (*voir* note p. 267).

et par suite,

$$\mathcal{G}(u) = M_0 \frac{\sin\sqrt{\lambda}\sin\pi u + \frac{F}{F_0 - F}(\sin\sqrt{\lambda}\sin\pi u - 0)}{\sqrt{\lambda}} = M_0\left(1 + \frac{F}{F_0 - F}\right)\sin\pi u.$$

Finalement,

$$\mathcal{G}(u) = M_0\left(1 + \frac{F}{F_0 - F}\right)\cos\frac{\pi x'}{l}.$$

C'est la seconde formule de M. Caquot.

Remarque. — L'expression du moment de flexion total (45) contient les fonctions $y_2(u)$ et $Y(u)$. La première dépend de la seule poutre donnée et peut être calculée une fois pour toutes lorsque celle-ci est soumise à des moments de flexion différents. La seconde, au contraire, dépend d'un tel moment et doit être calculée dans chaque cas. Cependant, chacune de ces fonctions est une solution particulière quelconque d'une certaine équation différentielle; par suite, dans le calcul et suivant les expressions de $I(u)$ et $G_1(u)$, il peut être commode de rechercher de telles solutions par des voies plus simples et éviter les développements en série nécessaires à la théorie générale pour la démonstration de leur existence. La démarche simplificatrice sera appréciable surtout pour la fonction $Y(u)$ sujette à des variations suivant le moment de flexion appliqué.

Une fois le moment de flexion total obtenu, le problème consiste à trouver le maximum maximorum de sa valeur absolue. L'intérêt de la pratique l'exige.

Cela implique la recherche des zéros positifs ou nuls de la dérivée de $\mathcal{G}(u)$, c'est-à-dire des solutions de l'équation

$$y_2(1)\,G_1'(u) + y_2(1)\,Y'(u) - Y(1)\,y_2'(u) = 0.$$

Le plus grand maximum de $|\mathcal{G}(u)|$ correspond à l'une ou plusieurs d'entre elles.

Une telle étude algébrique doit être faite dans chaque cas particulier. La pratique ne réclame pas d'ailleurs des valeurs exactes puisque aussi bien elle applique des coefficients de sécurité. La recherche du plus grand maximum peut donc être effectuée au moyen d'approximations judicieuses.

Au point de vue pratique une autre remarque, semblable à celle déjà faite dans le cas du moment parabolique, peut être indiquée dans le cas général actuel. Les données du problème doivent vérifier une inégalité de la forme

$$\frac{[Y'(u)\,y_2(1) - Y(1)\,y_2'(u)]^2}{l^2\,y_2^2(1)} < \eta,$$

pour toute valeur de u et pour un η choisi suffisamment petit. C'est la condition nécessaire de petitesse de $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ devant l'unité. Elle sera réalisée si

$$\frac{I}{l^2}[y'_{max}(u)]^2 < \eta.$$

Enfin, l sera calculé en fonction des données du problème au moyen de la relation

$$L_1 = \Sigma_1 + \frac{F}{ES} l_1$$

ou, après division par 2, de

$$L = \Sigma + \frac{F}{ES} l.$$

Mais c'est là une satisfaction purement théorique sans intérêt pratique

CHAPITRE IV.

FLAMBEMENT D'UNE POUTRE DROITE A MOMENT D'INERTIE SYMÉTRIQUE VARIABLE, SOUS L'ACTION SIMULTANÉE D'UNE CHARGE DE BOUT, D'UN MOMENT DE FLEXION PAIR VARIABLE AVEC L'ABSCISSE X ET D'UN MOMENT DE FLEXION IMPAIR VARIABLE.

Les deux moments de flexion sont dus, comme dans les cas précédents, à des forces (appliquées à la poutre) dirigées normalement à la fibre moyenne

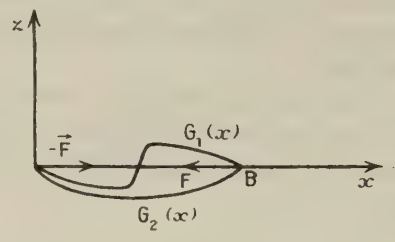


Fig. 8.

droite, donc sans composantes suivant Ax. Les relations

$$\frac{2s}{L} - 1 = \frac{2\sigma}{\Sigma} - 1 = \frac{2x}{l} - 1 = u$$

peuvent encore être écrites.

Soient

$$G_1(x) = F\,G_1(u), \qquad G_2(x) = F\,G_2(u)$$

respectivement les moments de flexion impair et pair.

En fait, chacun d'eux est défini séparément par rapport à l'état normal de la poutre de caractéristiques s et L. Sous leur influence séparée, il y aura des l différents mais liés à L, s et u par les trois égalités ci-dessus. Appliquées simultanément, la nouvelle valeur de l sera bien déterminée et les trois égalités écrites seront encore valables. Les fonctions $G_1(u)$ et $G_2(u)$ seront donc bien définies et d'une manière univoque, qu'il s'agisse de l'action séparée des deux moments de flexion ou de leur action simultanée.

La notation

$$y(x) = y\left(\frac{l u}{2} + 1\right) = y(u)$$

permet d'écrire encore

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4}{l^2} y''(u),$$

et l'équation de l'équilibre élastique

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{G_1(x) + G_2(x) + yF}{EJ}$$

devient

$$I(u) y''(u) + \frac{F l^2}{4 E I_0}[G_1(u) + G_2(u)] + \frac{F l^2}{4 E I_0} y(u) = 0. \tag{45}$$

La solution recherchée $y(u)$ de cette équation est unique, car elle doit satisfaire aux conditions

$$y(-1) = y(+1) = 0;$$

les deux constantes arbitraires sont ainsi déterminées.

La fonction $y(u)$ peut être trouvée également par la considération de l'équation

$$I(u) \eta_a''(u) + \frac{F l^2}{4 E I_0} G_a(u) + \frac{F l^2}{4 E I_0} \eta_a(u) = 0.$$

S'il est possible de trouver une solution impaire $\eta_{i1}(u)$ de cette équation où $a = 1$ et une solution paire $\eta_{i2}(u)$ de la même équation où $a = 2$, nulles pour $u = 1$, la somme

$$\eta_{i1}(u) + \eta_{i2}(u)$$

satisfera à l'équation (45) et représentera $y(u)$.

En effet, dans les expressions trouvées précédemment des moments de flexion totaux le remplacement de l par L (toujours effectué en pratique) modifie le résultat d'une façon imperceptible car les déformations sont très petites. Les deux équations différentielles obtenues par $a = 1$ et $a = 2$ donnent les déformations des fibres moyennes, à la même approximation près, lorsque est appliqué à la poutre le seul moment G_1 ou le seul moment G_2. Dans le premier cas la déformation est paire, dans le second elle est impaire.

Reste à s'assurer de l'existence et de l'unicité des solutions $\eta_{i1}(u)$ et $\eta_{i2}(u)$. Si $\frac{F l^2}{4 E I_0}$ est remplacé par λ, l'expression de $\eta_{i1}(u)$ est donnée par la formule (44). L'expression de $\eta_{i2}(u)$ est

$$\eta_{i2}(u) = \frac{Y_2(u) y_2(1) - Y_2(1) y_2(u)}{y_2(1)},$$

où $y_2(u)$ représente la fonction $X(u)$ du Chapitre I et $Y_2(u)$ la fonction obtenue par substitution de $G_2(u)$ à la place de $G_1(u)$ dans la série (43).

Le moment de flexion total s'obtient comme celui du Chapitre III (45)

$$\mathcal{G}(u) = -\frac{4}{l^2} E I_0 I(u) [\eta_1''(u) + \eta_2''(u)]$$

et s'écrit explicitement, d'après ce qui vient d'être dit, sous la forme

$$\mathcal{G}(u) = F\left[\frac{y_1(1) G_1(u) + y_1(1) Y_1(u) - Y_1(1) y_1(u)}{y_1(1)} + \frac{y_2(1) G_2(u) + y_2(1) Y_2(u) - Y_2(1) y_2(u)}{y_2(1)} \right],$$

avec

$$y_1(u) = u - \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{u}{I(u)}\, du + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{u}{I(u)}\, du - \dots,$$

$$Y_1(u) = -\lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)} du + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_1(u)}{I(u)} du - \dots,$$

$$y_2(u) = 1 - \lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} - \dots,$$

$$Y_2(u) = -\lambda \int_0^u du \int_0^u \frac{G_2(u)}{I(u)} du + \lambda^2 \int_0^u du \int_0^u \frac{du}{I(u)} \int_0^u du \int_0^u \frac{G_2(u)}{I(u)} du - \dots.$$

L'homogénéité de $\mathcal{G}(u)$ est respectée, car $G_1(u)$ et $G_2(u)$ ont les dimensions d'une longueur et λ est sans dimension.

Le moment de flexion total ainsi obtenu, l'étude du problème s'achève exactement comme au Chapitre III.

SUR

LES FONCTIONS A VARIATION BORNÉE D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR M. ÁKOS CSÁSZÁR.

Dans un Mémoire antérieur [1] j'ai donné une extension, aux dérivées approximatives d'ordre supérieur, du théorème de Denjoy-Khintchine concernant la dérivabilité approximative des fonctions à variation bornée généralisée. J'établirai dans l'article présent une généralisation analogue du théorème de Denjoy-Lusin d'après lequel toute fonction à variation bornée généralisée au sens restreint (1) sur un ensemble E y est presque partout dérivable. En même temps je donnerai une extension d'un théorème de M. Denjoy concernant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable réelle soit dérivable presque partout sur un ensemble E.

$x_0, \ldots, x_n$ étant des points différents et $f(x)$ une fonction définie en ces points, désignons par

$$Q_n(x_0, \ldots, x_n) \qquad \text{ou} \qquad Q_n(x_0, \ldots, x_n; f),$$

le produit par $n!$ du coefficient de x^n dans le polynome de degré n au plus qui coïncide avec $f(x)$ pour $x = x_0, \ldots, x_n$. On sait que les formules suivantes

(1) La fonction $f(x)$ est à variation bornée généralisée au sens restreint [(VBG*)] sur l'ensemble E, si l'on peut poser $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ de telle sorte que, pour tout entier k, les sommes

$$\sum_{i=1}^{\lambda} \omega(I_i)$$

restent bornées, $I_1, \ldots, I_\lambda$ désignant des intervalles n'empiétant pas et dont les extremités appartiennent à E_k et $\omega(I_i)$ désignant l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle I_i [2].

sont valables :

$$Q_0(x_0; f)=f(x_0),$$

$$Q_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1})=(n+1)\frac{Q_n(x_0, \ldots, x_n)-Q_n(x_1, \ldots, x_{n+1})}{x_0-x_{n+1}}.$$

Nous aurons aussi à nous servir des symboles suivants :

$$\Delta_n(x_0, \ldots, x_n; f)=\frac{1}{n}\,|Q_n(x_0, \ldots, x_n; f)|\,\delta(x_0, \ldots, x_n)$$
$$=|Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n+1})-Q_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)|\,\frac{\delta(x_0, \ldots, x_n)}{|x_0-x_n|}$$

et

$$\Omega_n(a, b; f)=\limsup_{a\leq x_i\leq b}\Delta_n(x_0, \ldots, x_n; f),$$

$\delta(x_0, \ldots, x_n)$ désignant le diamètre de l'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n\}$.

Nous appellerons dérivée forte d'ordre n de la fonction $f(x)$ au point a la limite

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x_i\to a}Q_n(x_0, \ldots, x_n; f)$$

lorsqu'elle existe et est finie, tandis que la dérivée faible d'ordre n sera définie par

$$f^n(a)=\lim_{\substack{x_i\to a\\ \min x_i\leq a\leq \max x_i}}Q_n(x_0, \ldots, x_n; f).$$

Nous emploierons souvent les théorèmes A, B, C, D., dus, sous une forme légèrement différente, à M. E. Hopf [4] :

A. Pour l'existence de $f^{(1)}(a)$, il faut et il suffit que $f(x)$ soit continu au voisinage de a et que $\overline{f}^+(x)$ (1) soit continu en ce point même.

B. Pour l'existence de $f^{(n)}(a)$ il faut et il suffit que $\varphi(x)=f^{(n-1)}(x)$ existe au voisinage de a et que $\varphi^{(1)}(a)$ existe.

C. Pour l'existence de $f^2(a)$ il faut et il suffit que $f(x)$ soit continu au voisinage de a et que $\overline{f}^+(x)$ soit dérivable au point a. On a

$$f^2(a)=\left(\frac{d}{dx}\overline{f}^+(x)\right)_{x=a}.$$

D. Pour l'existence de $f^n(a)$ il faut et il suffit que $\varphi(x)=f^{(n-2)}(x)$ existe au voisinage de a et que $\varphi^2(a)$ existe. On a $f^n(a)=\varphi^2(a)$.

On voit que l'existence de $f^{(n)}(a)$ entraîne celle de $f^{(n)}(a)$ et que celle de $f^{(n)}(a)$ entraîne celle de $f^n(a)$; de plus on a

$$f^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)=f^n(a).$$

---

(1) $\overline{f}^+(x)$ désigne ici le nombre dérivé supérieur droit de $f(x)$.

Enfin, par définition, $f(x)$ appartient à la classe (R_n^*) sur l'ensemble E, s'il existe un M tel que, pour toute suite finie (a_ν, b_ν) d'intervalles n'empiétant pas et tels que $a_\nu \in E$, $b_\nu \in E$, on ait toujours

$$\sum_\nu \Omega_n(a_\nu, b_\nu; f) < M.$$

De même, $f(x)$ appartient à la classe (S_n^*) sur l'ensemble E si, pour tout ε positif, l'ensemble E peut être couvert par une suite finie $< a_\nu, b_\nu >$ d'intervalles tels que

$$\sum_\nu \Omega_n(a_\nu, b_\nu; f)(b_\nu - a_\nu) < \varepsilon.$$

Enfin, $f(x)$ appartient à la classe $(R_n G^*)$ resp. $(S_n G^*)$ sur E, si $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, $f(x)$ étant (R_n^*) resp. (S_n^*) sur chaque ensemble E_k.

On voit immédiatement que les fonctions $(R_1 G^*)$ sont identiques aux fonctions (VBG^*).

Nous démontrerons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Pour que $f^{(n)}(x)$ existe presque partout sur l'ensemble* E, *il faut et il suffit que* E *soit la somme d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble sur lequel $f(x)$ est* $R_n G^*$).

THÉORÈME II. — *Pour que $f^{(n)}(x)$ existe presque partout sur* E, *il faut et il suffit que* E *soit la somme d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble sur lequel $f(x)$ est* $(S_{n-1} G^*)$.

La démonstration se compose d'une série de lemmes. Nous désignerons par I le plus petit intervalle contenant E.

LEMME 1. — *$f(x)$ étant (R_n^*) sur* E, *les nombres* $|Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})|$, $(x_i \in I)$ *sont bornés.*

Démonstration. — On a, par hypothèse, pour tout a, $b \in E$ et M suffisamment grand,

$$\Omega_n(a, b) < M.$$

$\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ étant n points fixes de I, on a pour $x_i \in I$

$$\begin{aligned}
&|Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) - Q_{n-1}(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})| \\
&\leq |Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) - Q_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_0)| \\
&\quad + |Q_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_0) - Q_{n-1}(x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi_0, \xi_1)| + \cdots \\
&\quad + |Q_{n-1}(x_{n-1}, \xi_0, \ldots, \xi_{n-2}) - Q_{n-1}(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |Q_n(x_i, \ldots, x_{n-1}, \xi_0, \ldots, \xi_i)| \, |x_i - \xi_i| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_n(x_i, \ldots, x_{n-1}, \xi_0, \ldots, \xi_i) \leq n M,
\end{aligned}$$

puisqu'on peut trouver deux points de E, a et b tels que l'intervalle $\langle a, b\rangle$ contienne les points x_i, ξ_i. On a donc

$$|Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})| \leq |Q_{n-1}(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})| + n\mathrm{M} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme 2. — *Si pour tout* $x_i \in \mathrm{I}$, *on a*

$$|Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_n; f)| < \mathrm{M},$$

$f^{[n-2]}(x)$ *existe sur* I *et y est continu.*

Démonstration. — Soient x_i et y_i des points distincts de I. On a par hypothèse

$$|Q_{n-2}(x_0, \ldots, x_{n-2}) - Q_{n-2}(y_0, \ldots, y_{n-2})|$$
$$\leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} |Q_{n-1}(x_i, \ldots, x_{n-2}, y_0, \ldots, y_i)|\,|x_i - y_i| \leq \mathrm{M}\,\delta(x_0, \ldots, y_{n-2}).$$

Une évaluation analogue étant valable dans le cas où l'un des points x_i vient coïncider avec l'un des y_i, l'existence de $f^{[n-2]}(x)$ est établie.

La même inégalité entraîne que

$$|f^{[n-2]}(x) - f^{[n-2]}(y)| \leq \mathrm{M}\,|x - y|$$

ce qui montre la continuité de $f^{[n-2]}(x)$.

Lemme 3. — $f(x)$ *étant* (R_n^*) *sur* E, $f^{[n-2]}(x)$ *existe sur* I *et est* (R_2^*) *sur* E.

Démonstration. — D'après les lemmes 1 et 2, $f^{[n-2]}(x)$ existe sur I. Pour montrer que $f^{[n-2]}(x)$ est (R_2^*) sur E, soit M′ tel que pour toute suite finie d'intervalles (a_ν, b_ν) n'empiétant pas et dont les extrémités sont situées sur E, on ait

$$\sum_\nu \Omega_n(a_\nu, b_\nu; f) < \mathrm{M}'.$$

Nous devons établir l'existence d'un nombre m tel que, pour tout système d'intervalles du même type, on ait

$$\sum_\nu \Omega_2(a_\nu, b_\nu; f^{[n-2]}) \leq m,$$

ce qui équivaut à l'inégalité

$$\sum_\nu \Delta_2(x^\nu, y^\nu, z^\nu; f^{[n-2]}) \leq m,$$

où x^ν, y^ν, z^ν sont des points arbitraires de $\langle a_\nu, b_\nu\rangle$.

On a évidemment

$$\Delta_2(x^\nu, y^\nu, z^\nu; f^{(n-2)}) = \left| \frac{f^{(n-2)}(x^\nu) - f^{(n-2)}(y^\nu)}{x^\nu - y^\nu} - \frac{f^{(n-2)}(y^\nu) - f^{(n-2)}(z^\nu)}{y^\nu - z^\nu} \right|$$

$$= \lim_{\substack{\xi_i^\nu \to x^\nu \\ \eta_i^\nu \to y^\nu \\ \zeta_i^\nu \to z^\nu}} \left| \frac{Q_{n-2}(\xi_0^\nu, \ldots, \xi_{n-2}^\nu; f) - Q_{n-2}(\eta_0^\nu, \ldots, \eta_{n-2}^\nu; f)}{x^\nu - y^\nu} \right.$$

$$\left. - \frac{Q_{n-2}(\eta_0^\nu, \ldots, \eta_{n-2}^\nu; f) - Q_{n-2}(\zeta_0^\nu, \ldots, \zeta_{n-2}^\nu; f)}{y^\nu - z^\nu} \right|$$

$$= \lim \frac{1}{n-1} \left| \sum_{i=0}^{n-2} Q_{n-2}(\xi_i^\nu, \ldots, \xi_{n-2}^\nu, \eta_0^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{n-2} Q_{n-2}(\eta_i^\nu, \ldots, \eta_{n-2}^\nu, \zeta_0^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu) \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y^\nu - z^\nu} \right|,$$

ξ_i^ν, η_i^ν, ζ_i^ν étant des points différents de $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ qui tendent vers x^ν, y^ν, z^ν respectivement. Or nous avons :

$$\left| Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu) \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y^\nu - z^\nu} \right|$$

$$\leq |Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)| \left| \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} \right|$$

$$+ |Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)| \left| \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} - \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y^\nu - z^\nu} \right|,$$

ce qui donne

$$\Delta_2(x^\nu, y^\nu, z^\nu; f^{(n-2)}) \leq \limsup_{\substack{\xi_i^\nu \to x^\nu \\ \eta_i^\nu \to y^\nu \\ \zeta_i^\nu \to z^\nu}} \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} |Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) \right.$$

$$- Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)| \left| \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} \right|$$

$$\left. + \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} |Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)| \left| \frac{\zeta_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} - \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y^\nu - z^\nu} \right| \right\}.$$

Comme on a

$$|Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)|$$

$$\leq |Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) - Q_{n-1}(\xi_{i+1}^\nu, \ldots, \eta_i^\nu, \eta_{i+1}^\nu) + \ldots$$

$$+ |Q_{n-1}(\eta_{i-1}^\nu, \ldots, \zeta_{i-1}^\nu) - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)|$$

$$\leq \Delta_n(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) + \ldots + \Delta_n(\eta_{i-1}^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu) \leq (n-1)\,\Omega_n(a_\nu, b_\nu),$$

et comme $|Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)|$ est borné (lemme 1), on a enfin

$$\Delta_2(x^\nu, y^\nu, z^\nu; f^{(n-2)}) \leq (n-1)\,\Omega_n(a_\nu, b_\nu; f),$$

ce qui prouve l'existence du nombre m cherché avec

$$m = (n-1)\,M.$$

LEMME 4. — *$f(x)$ étant (R_2^*) sur E, $f^2(x)$ existe presque partout sur E.*

Démonstration. — E′ désignant l'ensemble des points qui sont points d'accumulation bilatéraux de l'ensemble E, $\bar{f}^+(x)$ est (R_1^*) sur E′. D'abord, $\bar{f}^+(x)$ est fini sur I, car les nombres $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ sont bornés d'après le lemme 1. Soit m' un nombre tel que pour toute suite finie d'intervalles (a_ν, b_ν), ayant leurs extrémités situées sur E et n'empiétant pas, on ait

$$\sum_\nu \Omega_2(a_\nu, b_\nu; f) \leq m'.$$

Nous établirons l'existence d'un nombre m'' tel que pour toute suite finie (α_ν, β_ν) d'intervalles n'empiétant pas et dont les extrémités appartiennent à E′ et pour $a_\nu \leq \xi^\nu < \eta^\nu \leq \beta_\nu$, on ait

$$\sum_\nu |f^+(\xi^\nu) - \bar{f}^+(\eta^\nu)| \leq m''.$$

Pour cela, considérons des points $a_\nu \varepsilon E$ situés à gauche de α_ν et des points $b_\nu \varepsilon E$ situés à droite de β_ν et tels que ni les intervalles (a_ν, b_ν) de rang pair, ni ceux de rang impair n'empiètent les uns sur les autres. Considérons encore des points x^ν, y^ν tels que

$$a_\nu < \alpha_\nu \leq \xi^\nu < x^\nu < \eta^\nu < y^\nu < b_\nu.$$

Si x^ν tend vers ξ^ν et y^ν vers η^ν de façon convenable, alors

$$\frac{f(x^\nu) - f(\xi^\nu)}{x^\nu - \xi^\nu} \to \bar{f}^+(\xi^\nu), \qquad \frac{f(y^\nu - f(\eta^\nu)}{y^\nu - \eta^\nu} \to \bar{f}^+(\eta^\nu),$$

de sorte que

$$|\bar{f}^+(\xi^\nu) - \bar{f}^+(\eta^\nu)| \leq \lim_{\substack{x^\nu \to \xi^\nu \\ y^\nu \to \eta^\nu}} \left| \frac{f(x^\nu) - f(\xi^\nu)}{x^\nu - \xi^\nu} - \frac{f(y^\nu) - f(\eta^\nu)}{y^\nu - \eta^\nu} \right|$$
$$\leq \limsup [\Delta_2(x^\nu, \xi^\nu, y^\nu) + \Delta_2(\xi^\nu, y^\nu, \eta^\nu)],$$

et, en sommant par rapport à ν,

$$\sum_\nu |f^+(\xi^\nu) - f^+(\eta^\nu)|$$
$$\leq \sum_{\nu \text{ pair}} \Delta_2(x^\nu, \xi^\nu, y^\nu) + \sum_{\nu \text{ impair}} \Delta_2(x^\nu, \xi^\nu, y^\nu) + \sum_{\nu \text{ pair}} \Delta_2(\xi^\nu, y^\nu, \eta^\nu)$$
$$- \sum_{\nu \text{ impair}} \Delta_2(\xi^\nu, y^\nu, \eta^\nu) \leq 4m' = m''.$$

D'après le théorème de Denjoy-Lusin, $f^+(x)$ est dérivable presque partout sur E′, ce qui entraîne, en vertu de C., que $f^2(x)$ existe presque partout sur E′. Comme $(E - E')$ est dénombrable, il en résulte que $f^2(x)$ existe presque partout sur E.

C. Q. F. D.

LEMME 5. — *Si $f^{n}(x)$ existe presque partout sur* E, *on a* $E = E' + E''$, *où* E' *est de mesure nulle et* E'' *tel que* $f(x)$ *soit* $(R_n G^*)$ *sur* E''.

Démonstration. — Désignons par E_k le sous-ensemble de E contenant les points x pour lesquels

$$x < x_1 < \ldots < x_n \leq x + \frac{1}{k} \qquad \text{entraîne} \qquad Q_n(x, x_1, \ldots, x_n) < k.$$

Évidemment

$$E = E' + \sum_{k=1}^{\infty} E_k, \qquad E' = 0.$$

Soit E'_k la partie commune à E_k et à l'intervalle $\left(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right)$. Il suffit de montrer que $f(x)$ est (R_n^*) sur E'_k.

Soit $a < b$, $a \in E'_k$, $b \in E'_k$. Pour

$$a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b,$$

on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n(x_0, \ldots, x_n) &= Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) - Q_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \\
&\leq |Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) - Q_{n-1}(a, x_1, \ldots, x_{n-1})| \\
&\quad + |Q_{n-1}(a, x_1, \ldots, x_{n-1}) - Q_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)| \\
&= |Q_n(a, x_0, \ldots, x_{n-1})| \, |a - x_0| + |Q_n(a, x_1, \ldots, x_n)| \, |a - x_n| \\
&\leq 2k(b - a),
\end{aligned}$$

ce qui reste valable aussi pour

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b.$$

Ceci donne

$$\Omega_n(a, b) \leq 2k(b - a),$$

ce qui prouve l'énoncé.

Les lemmes 1-5 suffisent pour *la démonstration du théorème* I.

La nécessité de la condition énoncée résulte du lemme 5. Pour établir qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que, si $f(x)$ est (R_n^*) sur E, $f^{n}(x)$ existe presque partout sur E.

Soit donc $f(x)$ (R_n^*) sur E. En vertu du lemme 3, $\varphi(x) = f^{n-2}(x) = f^{n-2}(x)$ est (R_2^*) sur E, donc $\varphi^2(x)$ existe presque partout sur E, d'après le lemme 4. D'après D., $f^{n}(x)$ existe aux mêmes points, ce qu'il fallait démontrer.

Les lemmes 6 et 7 nous serviront à démontrer le théorème II.

LEMME 6. — *Si $f(x)$ est (S_{n-1}^*) sur* E, E *peut être recouvert par une suite finie d'intervalles* I_k *tels que* $f^{n-1}(x)$ *existe et soit continu sur les* I_k *et* (S_2^*) *sur les ensembles* EI_k.

Démonstration. — Par hypothèse, E peut être recouvert par une suite finie d'intervalles $I_k = (a_k, b_k)$ tels que $\Omega_{n+1}(a_k, b_k)$ soit fini. Le raisonnement conduisant au lemme 1 montre que les nombres $Q_n(x_0, \ldots, x_n; f)$ $(x \in I$

sont bornés, ce qui entraîne d'après le lemme 2 l'existence et la continuité de $f^{(n-1)}(x)$ sur I_k. La démonstration du lemme 3 montre que pour tout sous-intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ de I_k on a

$$\Omega_2(\alpha, \beta; f^{(n-1)}) \leq n\,\Omega_{n+1}(\alpha, \beta; f).$$

Couvrons l'ensemble EI_k par une suite finie d'intervalles tels que

$$\sum_{\nu} \Omega_{n+1}(\alpha_\nu, \beta_\nu; f)(\beta_\nu - \alpha_\nu) < \frac{\varepsilon}{n};$$

ces intervalles peuvent être choisis de façon qu'ils soient des sous-intervalles des I_k. On a alors

$$\sum_{\nu} \Omega_2(\alpha_\nu, \beta_\nu; f^{(n-1)})(\beta_\nu - \alpha_\nu) < \varepsilon, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme 7. — *Si $f(x)$ est (S_2^*) sur E, $\overline{f}^+(x)$ est continu en presque tout point de* E.

Démonstration. — Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, les points de E en lesquels l'oscillation de $\overline{f}^+(x)$ est $\geq \varepsilon$ forment un ensemble E_ε de mesure nulle. Couvrons E par un système fini d'intervalles; l'oscillation de $\overline{f}^+(x)$ est $\geq \varepsilon$ dans tous les intervalles du système qui contiennent un point de E_ε dans leur intérieur. On voit aisément que dans ces intervalles (α_ν, β_ν) on a

$$\Omega_2(\alpha_\nu, \beta_\nu; f) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme la longueur totale de ces intervalles vaut au moins $|E_\varepsilon|$, on a pour tout système fini d'intervalles couvrant E

$$\sum_{\nu} \Omega_2(\alpha_\nu, \beta_\nu)(\beta_\nu - \alpha_\nu) \geq |E_\varepsilon| \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le premier membre étant arbitrairement petit, on a

$$|E_\varepsilon| = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Démonstration du théorème II. *La condition est suffisante.* — Il suffit évidemment de montrer que, $f(x)$ étant (S_{n-1}^*) sur E, $f^{(n)}(x)$ existe presque partout sur E.

Supposons que $f(x)$ soit (S_{n-1}^*) sur E. D'après le lemme 6, E peut être recouvert par un système d'intervalles I_k tels que $\varphi(x) = f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x)$ existe sur I_k et soit (S_2^*) sur EI_k. D'après le lemme 7, $\overline{\varphi}^+(x)$ est continu en presque tout point de EI_k. De plus, $\varphi(x)$ est continu sur I_k; il en résulte, en vertu de A., que $\varphi^{(1)}(x)$ existe presque partout sur EI_k, ce qui équivaut, d'après B., à l'existence de $f^{(n)}(x)$ aux mêmes points.

La condition est nécessaire. — Supposons maintenant que $f^{(n)}(x)$ existe presque partout sur E. Presque tout point de E est contenu dans un intervalle dans lequel

$$|Q_n(x_0, \ldots, x_n; f)|$$

est borné. Un sous-système dénombrable $I_1, I_2, \ldots$ de ces intervalles recouvre E à un ensemble de mesure nulle près. Il suffit de montrer que chaque ensemble EI_k est la somme d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble sur lequel $f(x)$ est $(S_{n+1}G^*)$.

D'après le lemme 2, $\varphi(x) = f^{(n-1)}(x)$ existe et est continu sur I_k. Montrons d'abord qu'il est (S_2G^*) sur un ensemble qui contient presque tous les points de EI_k. Désignons par $H \subset I_k$ l'ensemble des points où $\overline{\varphi}'(x)$ est continu. Comme H est mesurable, on a

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i,$$

où $|H_0| = 0$ et F_i est fermé. $|EI_k - H|$ étant nul, il suffit d'établir que $\varphi(x)$ est (S_2^*) sur chaque ensemble F_i.

Soit $\varepsilon > 0$. Tout point de F_i est contenu dans un intervalle $I \subset I_k$ sur lequel l'oscillation de $\overline{\varphi}'(x)$ est $\leq \varepsilon$. Le théorème bien connu de Dini [3] assure que

$$\Delta_2(x, y, z; \varphi) \leq \varepsilon,$$

pour tous $x, y, z \in I$, c'est-à-dire que

$$\Omega_2(I; \varphi) \leq \varepsilon.$$

Un système fini de ces intervalles recouvre l'ensemble F_i, puisqu'il est fermé. On peut les modifier de façon qu'ils n'empiètent pas et qu'ainsi leur longueur totale devienne $\leq |I_k|$. Cela prouve que $\varphi(x)$ est (S_2^*) sur F_i.

Pour terminer la démonstration, nous n'avons qu'à montrer que $f(x)$ est (S_{n+1}^*) sur chaque ensemble F_i. Ceci résulte de ce que nous venons d'établir, en vertu de l'inégalité suivante qui est valable pour tout sous-intervalle (a, b) de I,

$$\Omega_{n+1}(a, b; f) \leq 2\Omega_2(a, b; f^{(n-1)}).$$

Pour établir cette dernière inégalité, considérons des points x_i tels que

$$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leq b.$$

On a

$$\Delta_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1}; f) = |Q_n(x_0, \ldots, x_n) - Q_n(x_1, \ldots, x_{n+1})|.$$

D'après un théorème de M. E. Hopf [4], il existe des points ξ_i et η_i tels que

$$Q_n(x_0, \ldots, x_n; f) = Q_1(\xi_0, \xi_1; f^{(n-1)}),$$
$$Q_n(x_1, \ldots, x_{n+1}; f) = Q_1(\eta_0, \eta_1; f^{(n-1)}),$$
$$x_0 < \xi_0 < \xi_1 < x_n, \qquad x_1 < \eta_0 < \eta_1 < x_{n+1}.$$

de sorte que

$$\Delta_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}; f) = Q_1(\xi_0, \xi_1; f^{(n-1)}) - Q_1(x_0, x_1; f^{(n-1)})$$
$$\leq \Delta_2(\xi_0, \xi_1; x_0) + \Delta_2(\xi_1, x_0, x_1) \leq 2\Omega_2(a, b; f^{(n-1)}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie.

[1] A. Császár. *Sur les dérivées approximatives d'ordre supérieur.* A paraître dans les *Commentarii Mathematici Helvetici.*

[2] S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, 1933, Chap. VIII et IX.

[3] *Voir* par exemple S. Saks, *loc. cit.*, p. 138.

[4] E. Hopf, *Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften*, 1926.

SUR

LA SYNCHRONISATION DES SYSTÈMES

A

PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ

PAR M. JULES HAAG.

INTRODUCTION.

L'entretien d'un mouvement périodique se fait, en Horlogerie, de deux manières différentes : *échappement* et *synchronisation*. Dans le premier cas, le plus fréquent, le balancier reçoit une impulsion chaque fois qu'il parcourt un angle déterminé, dans un sens ou dans l'autre. Dans le second cas, les impulsions sont fournies par un couple qui est une fonction périodique déterminée du temps. On peut aussi combiner les deux procédés. Dans tous les cas, *les impulsions sont très faibles*, parce qu'il en est ainsi des résistances passives.

La question qui se pose est de savoir si, en choisissant au besoin et approximativement les conditions initiales, *le mouvement tend asymptotiquement vers un mouvement périodique*.

Ce problème est élémentaire et bien connu dans le cas de l'entretien par couple sinusoïdal, avec résistance proportionnelle à la vitesse. Mais, en Chronométrie, ces conditions ne sont jamais réalisées. En particulier, dans le cas de l'échappement, le problème est totalement différent, la période du mouvement éventuellement entretenu étant inconnue.

Le même problème se pose tout naturellement pour un système ayant *plusieurs degrés de liberté :* il a d'ailleurs des applications pratiques.

Après avoir résolu la question pour un seul degré de liberté, d'abord par une méthode intuitive, puis par une méthode entièrement rigoureuse, je l'ai ensuite résolue pour un nombre quelconque de degrés de liberté. C'est l'exposé de cette solution, illustrée de quelques applications concrètes, qui fait l'objet du présent Mémoire.

Toute la théorie repose sur un *théorème très général sur les solutions périodiques de certains systèmes différentiels*, que j'ai dû établir au préalable, pour donner une base rigoureuse à ladite théorie. Deux démonstrations successives de ce théorème ayant paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, je me suis contenté d'en reproduire l'énoncé au début du premier chapitre, lequel est consacré à l'exposé de la théorie générale.

Dans les chapitres suivants, j'étudie diverses applications, dont certaines ont d'ailleurs été le but initial de ma théorie et m'ont guidé dans son édification.

Dans le Chapitre II, j'envisage le cas simple, mais important, de *l'entretien d'un seul balancier par échappement ou synchronisation harmonique ou sous-harmonique*. C'est le problème classique qui se pose en Chronométrie. Je ne l'ai pas développé ici dans toute son ampleur, parce qu'un exposé plus détaillé a été publié dans les *Annales françaises de Chronométrie*.

Dans le Chapitre III, j'étudie le problème des *balanciers à support mobile*. J'indique la marche à suivre pour *déterminer les régimes synchronisés et étudier leur stabilité*.

Le Chapitre IV est une application particulière du précédent, à savoir le problème de la *montre oscillante*. Ce problème, qui a une origine commerciale, a été étudié expérimentalement, il y a une vingtaine d'années, par MM. Jacquerod et Mügeli, au Laboratoire suisse de Recherches horlogères de Neuchâtel. J'avais, à cette époque, entrepris son étude théorique; mais j'avais tout de suite été arrêté par la complication des calculs dans lesquels je m'étais engagé et qui ne pouvaient d'ailleurs me conduire à rien. La présente théorie en donne au contraire la solution immédiate, laquelle est bien d'accord, tout au moins qualitativement, avec les résultats expérimentaux des auteurs ci-dessus et aussi avec ceux qui ont été obtenus par M. Mesnage dans des expériences plus récentes.

Le Chapitre V est une application analogue à la précédente; c'est le problème des *pendules sympathiques*.

Dans le Chapitre VI, je considère le *couplage en chaîne* de plusieurs balanciers, signalé par M. Bouasse dans le cas de deux diapasons et récemment étudié expérimentalement par deux élèves de l'Institut de Chronométrie dans le cas de deux, trois ou quatre pendules.

Le Chapitre VII est une courte étude de *l'entretien d'un pendule par le secteur*. J'avais déjà traité ce problème, dans le travail cité plus haut, en considérant le pendule comme un système à un seul degré de liberté et faisant une hypothèse contestable sur le courant qui traverse la bobine. Je le considère ici comme un système à deux degrés de liberté : l'élongation du balancier et l'intensité du courant. J'aboutis à cette conclusion qu'il n'y a pas synchronisation, du moins avec de petites amplitudes. On peut, comme l'a fait M. Hirschi, limiter celles-ci par une butée élastique. Mais, le couple introduit par cette butée est trop grand pour qu'on puisse le considérer comme un petit couple perturbateur et, de ce point de vue, le problème reste à résoudre.

J'ai aussi appliqué ma théorie générale à l'étude de l'*influence de la vibration parasite* dans la suspension à lame d'un pendule. Mais, pour réduire l'étendue du présent Mémoire, je n'ai pas reproduit cette étude.

Il existe probablement beaucoup d'autres problèmes, mécaniques ou électriques, susceptibles d'être traités par la méthode générale que nous allons exposer. Je songe en particulier à la théorie du *pendule esclave* de l'horloge Shortt. Mais, je laisse à d'autres chercheurs le soin de l'entreprendre.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE.

1. *Rappel d'un théorème sur les équations différentielles* (1). — Considérons n fonctions $f_i(x, t)$ des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$. Nous faisons les hypothèses suivantes :

1° Les f_i admettent la période T par rapport à t.

2° Elles ont des dérivées premières et secondes par rapport aux x et à t; ces dérivées ont un module borné.

3° Les f_i peuvent présenter des discontinuités, ayant lieu lorsque t traverse certaines valeurs fonctions déterminées des x. Ces dernières fonctions sont continues et ont, elles aussi, des dérivées premières et secondes de module borné.

Pour faciliter le langage, nous appellerons M le point de l'espace à n dimensions admettant les x pour coordonnées cartésiennes.

Cela posé, considérons le système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda f_i(x, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où λ désigne un facteur constant, positif et arbitrairement petit. Nous appellerons solution issue de M_0 celle pour laquelle M est en M_0 pour $t = 0$.

A chaque f_i nous faisons correspondre la fonction

$$F_i(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f_i(x, t)\, dt, \tag{2}$$

l'intégrale étant calculée en supposant les x constants. Considérons le *système associé*

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda F_i(x). \tag{3}$$

---

(1) *Bull. Sc. math.*, t. LXX, 1946, p. 155 à 172.

Supposons qu'il ait une solution constante représentée par le point P. Les coordonnées de ce point vérifient donc le système

$$F_i(x) = 0. \tag{4}$$

Nous appellerons *équation de stabilité* l'équation caractéristique des solutions infiniment voisines. Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Pour que le système* (1) *ait une solution périodique stable voisine de* P, *lorsque* λ *est suffisamment petit, il faut et il suffit que les racines de l'équation de stabilité aient toutes leur partie réelle négative* (1).

Précisons la signification de ce théorème.

Supposons qu'une racine au moins ait sa partie réelle positive. En choisissant R et λ assez petits, on peut trouver une infinité de points M_0 situés à une distance $PM_0 < R$ du point P et tels que la solution issue de M_0 amène M à une distance $PM > R$, pour t suffisamment grand.

Supposons maintenant que toutes les racines aient leur partie réelle négative. En choisissant R et λ assez petits, la solution issue de tout point M_0 tel que $PM_0 < R$ vérifie, quel que soit $t > 0$, la condition $PM < R$. En outre, elle tend asymptotiquement vers une solution périodique parfaitement déterminée du système (1). Pour celle-ci, la distance PM est infiniment petite, de l'ordre de λ, quel que soit t.

La limite supérieure λ_1 que ne doit pas dépasser λ pour que la validité de ce théorème soit assurée est, *grosso modo*, inversement proportionnelle à la limite supérieure des modules des dérivées premières et secondes dont il a été question plus haut.

J'ai aussi démontré que si l'on considère les solutions des systèmes (1) et (3) issues d'un même point M_0, leur écart PP′ est de l'ordre de $\lambda^2 t^2$; il est donc infiniment petit du second ordre par rapport à λ, si t reste fini.

Tout ceci continue à s'appliquer si les f_i dépendent de λ et sont holomorphes au voisinage de $\lambda = 0$, à condition toutefois que les bornes supérieures de 2^o puissent être choisies indépendantes de λ. Dans ce cas, les quotients des r_i par λ sont des fonctions de λ; mais, ce sont leurs valeurs pour $\lambda = 0$ qui doivent avoir leur partie réelle négative.

2. *Énoncé du problème général.* — Considérons un système dépendant des n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et sur lequel nous faisons les hypothèses suivantes :

---

(1) Les conditions que doivent vérifier les coefficients de l'équation ont été mises sous différentes formes par divers auteurs. On pourra, par exemple, consulter un travail de M. Montel (*Mathematica*, vol. V, p. 110-129) et un autre de M. Couffignal (*Revue scient.*, 1945, p. 195 à 210).

1° Sa force vive est

$$2T = M\left(\sum_{i=1}^{n} q_i'^2\right). \tag{5}$$

2° Il est soumis à des *forces principales* dérivant de la fonction U définie par la formule

$$2U = -M\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 q_i^2\right), \tag{6}$$

les ω_i désignant des constantes positives.

3° Il est soumis à des *forces perturbatrices* dont le travail virtuel est

$$\delta\mathfrak{T} = \lambda M\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i\right). \tag{7}$$

Le coefficient λ est un nombre constant, positif, arbitrairement petit, auquel nous ferons jouer le rôle d'*infiniment petit principal*. Quant à M, c'est un facteur constant et positif, qui pourra représenter, suivant les cas, une masse ou un moment d'inertie.

Les Q_i sont des fonctions déterminées des q_k, q_k', de t et de λ. Elles sont holomorphes par rapport à λ au voisinage de $\lambda = 0$. Par rapport à t, elles admettent la *période* $\frac{2\pi}{\omega}$. Considérées comme fonctions des q, q', elles sont finies et admettent des dérivées premières et secondes également finies. Elles peuvent présenter des discontinuités, se produisant lorsque t traverse certaines fonctions de (q), continues et à dérivées premières et secondes également continues.

Cela posé, nous nous proposons de *rechercher les mouvements périodiques* du système et d'*étudier leur stabilité*.

3. *Principe de la méthode.* — Supposons que les ω_i soient de la forme

$$\omega_i = \omega \frac{m_i}{N}\sqrt{1 + \lambda\varepsilon_i}, \tag{8}$$

N et les m_i désignant des nombres *entiers* et les ε_i des constantes. Écrivons les équations de Lagrange

$$q_i'' + \omega^2 \frac{m_i^2}{N^2} q_i = \lambda\left(Q_i - q_i \varepsilon_i m_i^2 \frac{\omega^2}{N^2}\right). \tag{9}$$

Puis, faisons le changement de variables

$$\frac{\omega t}{N} = \varphi, \qquad q_i = y_i \cos\varphi_i, \qquad \frac{dq_i}{d\varphi} = -m_i y_i \sin\varphi_i, \qquad \varphi_i = m_i\varphi + x_i; \tag{10}$$

nous obtenons le système

$$(11)\qquad y_i\frac{dx_i}{d\varphi}=\lambda f_i\cos\varphi_i,\qquad \frac{dy_i}{d\varphi}=\lambda f_i\sin\varphi_i,$$

en posant

$$(12)\qquad f_i=\varepsilon_i m_i q_i-\frac{N^2}{m_i\omega^2}Q_i.$$

Les seconds membres de ces équations différentielles admettent la période 2π par rapport à φ. Si l'on *écarte les valeurs nulles des* y_i, ils possèdent les propriétés requises au n° 1 pour les fonctions f_i. Le théorème général énoncé ci-dessus est donc applicable au système (11).

Le *système associé* est

$$(13)\qquad y_i\frac{dx_i}{d\varphi}=\lambda X_i,\qquad \frac{dy_i}{d\varphi}=\lambda Y_i,$$

avec

$$(14)\qquad \begin{cases} X_i=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_i\cos\varphi_i\,d\varphi=\dfrac{m_i\varepsilon_i y_i}{2}-\dfrac{N^2}{2\pi m_i\omega^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} Q_i\cos\varphi_i\,d\varphi,\\ Y_i=\dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} f_i\sin\varphi_i\,d\varphi=-\dfrac{N^2}{2\pi m_i\omega^2}\displaystyle\int_0^{2\pi} Q_i\sin\varphi_i\,d\varphi, \end{cases}$$

les intégrales étant calculées en supposant les x_k, y_k constants. Les X_i, Y_i sont des fonctions déterminées des x_k, y_k; elles admettent la période 2π par rapport aux x_k.

Signalons l'identité suivante. Soit $\mathfrak{C}$ le *travail total des forces perturbatrices lorsque* φ *croît de zéro à* 2π, les x_k, y_k étant constants et λ ayant la valeur zéro dans les Q_i. On a visiblement

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{n} m_i^2 y_i Y_i=\mathfrak{C}\frac{N^2}{2\pi\lambda M\omega^2}.$$

Remarque. — Nous avons écarté ci-dessus les valeurs $y_i=0$. Elles peuvent toutefois être conservées, si f_i est divisible par y_i.

4. *Régimes synchronisés.* — Nous appellerons *point de synchronisation* tout point P de l'espace à $2n$ dimensions dont les coordonnées (x, y) vérifient les *équations de synchonisation*

$$(16)\qquad X_i=0,\qquad Y_i=0.$$

L'équation de stabilité correspondante s'obtient en annulant le déterminant $D(r)$ du système linéaire

$$(17)\qquad r y_i\xi_i=\lambda\,dX_i,\qquad r y_i\eta_i=\lambda\,dY_i,$$

dX_i et dY_i désignant les différentielles totales des fonctions X_i et Y_i, où l'on remplace dx_i par ξ_i et dy_i par $y_i\eta_i$.

Nous dirons que le point P est *stable* si *les racines de l'équation de stabilité ont leur partie réelle négative*. Nous savons que, dans ce cas, *si* λ *est inférieur à une certaine limite* λ_1, les équations (11) admettent une solution de période 2π par rapport à φ, vers laquelle tend asymptotiquement toute solution issue d'un point suffisamment voisin de P. En se reportant aux formules (10), on voit qu'à la solution périodique ci-dessus correspond un *mouvement périodique du système*, dont *la période est* $N\frac{2\pi}{\omega}$, c'est-à-dire N *fois la période des forces perturbatrices*.

Ce mouvement est *stable;* c'est-à-dire que si les conditions initiales sont telles que le point M_0 correspondant soit suffisamment voisin de P, le mouvement qui en résulte tend asymptotiquement vers le mouvement périodique.

La *rapidité de la synchronisation* est d'autant plus grande que les parties réelles des racines de l'équation de stabilité ont une valeur absolue plus grande. Cette rapidité est mesurée, *grosso modo*, par la rapidité avec laquelle les fonctions $e^{\frac{r\omega t}{N}}$ tendent vers zéro. On ne change par les conditions de stabilité si, comme nous le ferons souvent, on multiplie r par un facteur positif.

Si λ *est très petit*, le point M reste, pendant le mouvement périodique ci-dessus, très voisin de P; de sorte que *chaque* q_i *est sensiblement une fonction sinusoïdale du temps*, ayant pour pulsation $\frac{m_i\omega}{N}$, soit approximativement sa pulsation propre ω_i. Mais, *l'amplitude et la phase subissent de petites fluctuations*, de période NT. Ces fluctuations sont d'autant plus petites que λ est plus petit.

5. *Il n'existe pas d'autres mouvements périodiques que les précédents.* — Supposons en effet que les q_i admettent la période T. D'après (9), les fonctions Q_i admettent aussi cette période, quand on y remplace les q_i par la solution périodique en question. On a donc, quel que soit t,

$$Q_i(q, q', t+T) = Q_i(q, q', t). \tag{18}$$

Si ces équations ne sont pas vérifiées quels que soient les q, q' et t, elles constituent un système de n équations différentielles du premier ordre, évidemment incompatible (1) avec le système (9). Dès lors, les égalités (18) doivent être des identités; donc, $T = N\frac{2\pi}{\omega}$, N désignant un nombre entier.

6. Faisons maintenant le changement de variables (10), en laissant les m_i provisoirement indéterminés. Les q_i admettent la période 2π par rapport à φ. Donc, il en est de même des y_i, $\cos\varphi_i$, $\sin\varphi_i$. Si φ augmente de 2π, les y_i ne changent pas et chaque φ_i augmente de $2\pi k_i$, k_i étant entier. Prenons alors $m_i = k_i$.

(1) A moins qu'il ne soit possible de choisir les fonctions Q_i de manière à réaliser la compatibilité. Mais, un tel système de forces perturbatrices serait, s'il existait, tout à fait artificiel et sans aucun intérêt pratique.

La dernière formule (10) nous montre que x_i ne change pas. En définitive, les x_i, y_i admettent la période 2π par rapport à φ.

Soient a_i, b_i leurs valeurs pour $\varphi = 0$. De (11), on déduit

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_i \cos\varphi_i}{\gamma_i} d\varphi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} f_i \sin\varphi_i d\varphi = 0.$$

Dans ces intégrales, on doit remplacer les x_i, y_i par la solution périodique ci-dessus. Si on les remplace par les a_i, b_i, on commet une erreur (1) de l'ordre des différences $x_i - a_i$, $y_i - b_i$ et l'on sait que ces différences valent $O(\lambda)$. On a donc

$$X_i(a, b) = \alpha_i, \qquad Y_i(a, b) = \beta_i, \qquad \alpha_i \text{ et } \beta_i = O(\lambda).$$

On en déduit, d'après le théorème des fonctions implicites, qu'il existe un point de synchronisation P voisin du point (a, b). Or, nous savons que les équations (11) admettent au plus une solution périodique voisine de ce point P. *Cette solution coïncide donc nécessairement avec la solution périodique dont nous avons admis l'existence.*

7. Dans le cas où une racine au moins de l'équation de stabilité a sa partie réelle positive, on peut trouver une infinité de positions de M_0 infiniment voisines de P et telles que, par la suite, M s'éloigne beaucoup de P. Il est possible que, pour certaines positions de M_0, M tende vers P; mais ceci nécessite des conditions initiales vérifiant certaines relations déterminées (2), donc physiquement irréalisables. On peut donc dire que, dans ce cas, la synchronisation est pratiquement impossible.

Il peut arriver que les conditions auxquelles nous venons de faire allusion soient presque vérifiées. Dans ce cas, le point M commencera par s'approcher de P, pendant un temps qui pourra être très long; mais il finira toujours par s'en éloigner définitivement. Si l'on observe seulement la première partie du mouvement, on aura l'illusion d'avoir obtenu un régime synchronisé; cela prouve que, dans une étude expérimentale du phénomène, il faut avoir la patience de *poursuivre assez longtemps les observations*.

8. Les considérations du n° 6 nous conduisent à nous poser la question suivante : ω et les ω_i *étant donnés, comment peut-on trouver les mouvements périodiques correspondants*. Ceci revient à chercher *comment on peut choisir* N *et les* m_i, de telle manière que le système (11) ait une une ou plusieurs solutions stables et qu'en outre *la valeur de* λ *soit inférieure à la limite* λ_1 (n° 4), laquelle dépend des fonctions f_i (n° 1).

---

(1) Cela résulte du lemme II de la seconde démonstration de notre théorème fondamental (*loc. cit.*).

(2) Celles qui font disparaître les exponentielles devenant infinies avec t.

Les fonctions Q_i étant données, la valeur de λ est entièrement déterminée par la grandeur des forces perturbatrices. D'autre part, si l'on appelle e_i l'erreur $\frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \frac{m_i^2}{N^2}$, on a $\varepsilon_i = \frac{N^2}{\lambda m_i^2} e_i$ et la formule (12) peut s'écrire

$$f_i = m_i(1 + \lambda\varepsilon_i)\left(-\frac{Q_i}{\omega_i^2} + q_i \frac{e_i \omega^2}{\lambda \omega_i^2}\right).$$

La limite λ_1 dépend donc non seulement de la nature analytique des fonctions Q_i, en particulier de leurs dérivées premières et secondes (n° 1), mais aussi de la grandeur des nombres m_i. Si l'erreur e_i est assez petite, $\frac{N}{m_i}$ est sensiblement égal à $\frac{\omega}{\omega_i}$; donc $\lambda\varepsilon_i = \frac{N^2}{m_i^2} e_i$ est voisin de zéro et peut être négligé dans la première parenthèse de la formule ci-dessus. Dans ces conditions, les fonctions f_i, ainsi que leurs dérivées premières et secondes, sont approximativement proportionnelles aux m_i. Dès lors, si, dans le but de diminuer e_i, on augmente N et les m_i, sensiblement dans le même rapport, la limite λ_1 variera *grosso modo* dans le rapport inverse et pourra devenir inférieure à la valeur effective de λ. Cela *limite le nombre des régimes synchronisés*.

Il n'est toutefois pas impossible que *plusieurs systèmes de valeurs de* N *et des* m_i *puissent convenir*. En particulier, il y a des chances pour que ceci arrive *si tous les rapports* $\frac{\omega_i}{\omega}$ *sont très petits*, car on peut alors approcher ces rapports par différentes fractions $\frac{m_i}{N}$ sans que les m_i deviennent très grands.

Observons encore que la condition $\lambda < \lambda_1$ est une condition *suffisante* pour la validité de notre théorie. Mais il est possible qu'elle ne soit pas nécessaire (1).

Signalons enfin que si les forces perturbatrices dépendent de λ, les bornes supérieures des modules des dérivées premières et secondes des Q_i doivent être *indépendantes de* λ. Dans ce cas, les conditions de stabilité doivent seulement être vérifiées pour $\lambda = 0$.

9. Supposons que les équations de synchronisation se partagent en deux groupes (G_1) et (G_2), tels que (G_1) ne contienne que les x_i, y_i d'indice $i > p$, tandis que (G_2) ne contient que les x_i, y_i d'indice $i \leq p$. La recherche des points de synchronisation se décompose en la résolution des deux groupes envisagés séparément. En particulier, les x_i, y_i d'indice $> p$ sont indépendants des équations du groupe (G_2).

Supposons d'autre part que les équations de (G_1) ne fassent intervenir que certaines des forces perturbatrices, soit (F). Nous ne changerons pas les x_i, y_i d'indice $> p$, si nous supprimons toutes les forces autres que (F) et si nous

(1) *Exemple* : Entretien par force sinusoïdale, avec frottement visqueux

annulons tous les y_i d'indice $\leq p$. D'après (15), nous savons que, dans ce cas, le travail $\mathfrak{T}$ des forces (F) doit être nul, lorsque φ croît de zéro à 2π.

Supposons maintenant que les forces (F) soient uniquement des résistances passives. Leur travail ne peut être nul que si les y_i d'indice $> p$ sont nuls. Donc,

THÉORÈME. — *Si les équations de synchronisation se décomposent en deux groupes indépendants, dont l'un ne fait intervenir que des résistances passives, les y_i figurant dans ce groupe sont nécessairement nuls.*

10. *Cas où les forces perturbatrices ne dépendent pas du temps.* — Dans tout ce qui précède, nous n'avons envisagé que le cas où les forces perturbatrices comprennent des forces fonctions périodiques du temps, c'est-à-dire le cas de la *synchronisation proprement dite;* le mouvement se synchronise sur les forces.

Il nous reste à *examiner le cas où aucune des forces perturbatrices ne dépend du temps.*

Dans ce cas, *la pulsation ω n'est pas donnée :* nous la considérons comme une inconnue et nous prenons $N = 1$. Pour déterminer ω, remarquons que les φ_i ne changent pas si l'on diminue φ de la constante arbitraire C, en même temps que l'on augmente x_i de $m_i C$. Comme les fonctions f_i ne contiennent φ que par l'intermédiaire des φ_i, elles ne changent pas non plus. Il s'ensuit que *les fonctions X_i et Y_i sont invariantes quand les x_i subissent les accroissements $m_i C$.* Il revient au même de dire qu'elles ne dépendent que des $2n - 1$ variables y_i et, par exemple, $z_i = \frac{x_i}{m_i} - \frac{x_1}{m_1}$. Dès lors, les équations (16) sont en général incompatibles. En éliminant entre elles les $2n - 1$ inconnues ci-dessus, *on obtient l'équation déterminant ω.* Ayant une racine de cette équation, on en déduit un point de synchronisation, en prenant la solution commune aux équations (16). Les $\frac{x_i}{m_i}$ correspondants ne sont déterminés qu'à une constante additive près, que l'on peut choisir arbitrairement, car cela revient à choisir l'origine des temps.

11. En ce qui concerne la *stabilité*, il convient de remarquer que, parmi les solutions du système associé infiniment voisines du point de synchronisation, se trouve la solution suivante $\xi_i = m_i C$, $\eta_i = 0$, où C désigne une constante arbitraire infiniment petite. On en conclut que *l'équation caractéristique admet nécessairement la racine $r = 0$.* Dans la théorie rappelée au n° 1, je n'ai pas traité ce cas particulier. Mais, ici, cette difficulté n'existe pas. Il suffit en effet de faire par exemple le changement de variables

$$0 = \frac{x_1}{m_1} + \varphi, \qquad z_i = \frac{x_i}{m_i} - \frac{x_1}{m_1};$$

de sorte que

$$\varphi_1 = m_1 0, \qquad \varphi_i = m_i (0 + z_i).$$

En éliminant x_1, on obtient un système différentiel déterminant les $2n-1$ variables z_i, y_i en fonction de θ. On a ensuite x_1 par une quadrature, à une constante arbitraire près. La stabilité du mouvement dépend uniquement de celle du système ci-dessus, laquelle est déterminée par une équation caractéristique de degré $2n-1$, qui n'est autre, à $O(\lambda^2)$ près, que l'équation caractéristique précédente *débarrassée de la racine nulle*. C'est cette équation qui constitue *l'équation de stabilité*.

Le même calcul montre que la détermination des points de synchronisation et de ω, par la méthode indiquée au n° 10, *n'est exacte qu'en première approximation*.

12. On peut procéder à l'exclusion de la racine nulle en développant le déterminant $D(r)$. On doit constater qu'il n'a pas de terme constant et l'on supprime le facteur r.

Mais, on peut aussi former directement l'équation de stabilité, débarrassée dudit facteur, en procédant de la manière suivante.

Les équations (17) sont de la forme

$$r\gamma_i\xi_i=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\xi_j+b_{ij}\tau_j), \qquad r\gamma_i\tau_{ii}=\sum_{j=1}^{n}(a'_{ii}\xi_j+b'_{ij}\tau_{ii}).$$

Elles admettent la solution $r=0$, $\xi_i=m_iC$, $\tau_{ii}=0$, quel que soit C. On a donc

$$\sum_j a_{ij}m_j=0, \qquad \sum_j a'_{ij}m_j=0.$$

Posons alors $\xi_i=\xi'_i+m_i\xi$. Le système devient, en tenant compte des identités ci-dessus,

$$\sum_j a_{ij}\xi'_j+\sum_j b_{ij}\tau_{ij}-r\gamma_i\xi'_i=r\gamma_i m_i\xi,$$

$$\sum_j a'_{ij}\xi'_j+\sum_j b'_{ij}\tau_{ij}-r\gamma_i\tau_{ii}=0.$$

Si r est racine de $D(r)$, ce système en ξ'_i, τ_{ii} admet une solution quel que soit ξ. Or, son déterminant est $D(r)$; comme il est nul, tous les déterminants caractéristiques doivent être nuls. L'un de ceux-ci s'obtient en remplaçant par exemple l'élément appartenant à la première colonne et à la ligne de rang i par $r\gamma_i m_i\xi$, les autres éléments de la première colonne étant remplacés par zéro. Le déterminant ainsi obtenu contient le facteur r. En le supprimant, ainsi que le facteur arbitraire ξ, on obtient l'équation de stabilité. D'où la règle suivante :

L'équation de stabilité s'obtient en annulant le déterminant déduit de $D(r)$ *en*

remplaçant les éléments de la première colonne par les nombres

$$y_1 m_1, \quad y_2 m_2, \quad \ldots \quad y_n m_n, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0,$$

écrits de haut en bas.

Bien entendu, on peut remplacer la première colonne par une colonne quelconque de rang $\leq n$.

CHAPITRE II.

ENTRETIEN D'UN BALANCIER.

13. *Entretien par un couple synchronisant dépendant seulement du temps.* — Appelons (1) q l'élongation du balancier, évaluée en radians; M son moment d'inertie; ω_1 sa pulsation propre. Nous supposons que les couples perturbateurs comprennent :

1° un *couple périodique* $\lambda M\omega^2 f(t)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

2° un couple de la forme $\lambda M\omega_1^2 F(q, q')$, donc *indépendant du temps*.

Ce couple comprend toujours le moment des *résistances passives*; il peut aussi comprendre un *couple correctif* provenant de ce que le balancier n'est pas exactement un oscillateur harmonique, le couple exercé par un *échappement*, des couples résistants provenant de l'entrainement de divers organes, etc.

Les fonctions X et Y comprennent chacune deux termes correspondant respectivement aux deux couples ci-dessus. Calculons d'abord les termes provenant du couple synchronisant.

Nous avons $Q = \omega^2 f(t)$; d'où, d'après (14),

$$X = -\frac{N^2}{2\pi m_1}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{N\varphi}{\omega}\right)\cos(m_1\varphi + x)\,d\varphi,$$

$$Y = -\frac{N^2}{2\pi m_1}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{N\varphi}{\omega}\right)\sin(m_1\varphi + x)\,d\varphi.$$

La fonction $f\left(\frac{N\varphi}{\omega}\right)$ admet la période $\frac{2\pi}{N}$ par rapport à φ. Donc, son développement en série de Fourier ne contient que les sinus et cosinus de multiples de $N\varphi$. Il s'ensuit que les deux intégrales ci-dessus sont nulles si m_1 n'est pas un multiple de N. Donc, *la synchronisation n'est possible que si la fréquence propre du balancier est multiple de la fréquence du couple.*

---

(1) Dans ce chapitre, nous supprimons les indices de q_1, x_1, y_1, ε_1.

Dans ce cas, on doit prendre $N = 1$, pour que la fraction $\frac{m_1}{N}$ soit irréductible. Si l'on appelle $A\cos m_1\varphi + B\sin m_1\varphi$ l'harmonique de rang m_1 de la fonction $f\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)$, on a

$$X = \frac{A\cos x - B\sin x}{-2m_1}, \qquad Y = \frac{A\sin x + B\cos x}{-2m_1}.$$

C'est aussi ce qu'on obtient en remplaçant la fonction $f\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)$ par

$$A\cos m_1\varphi + B\sin m_1\varphi.$$

Donc, *on ne change rien au phénomène de la synchronisation en remplaçant le couple synchronisant par son harmonique de rang* m_1. Nous sommes ainsi *ramenés au cas où le couple synchronisant est sinusoïdal et a une fréquence voisine de la fréquence propre du balancier.*

14. Nous pouvons maintenant prendre $N = m_1 = 1$ et $f(t) = h\cos\omega t$. Les formules ci-dessus se réduisent alors à

$$X = -\frac{h\cos x}{2}, \qquad Y = -\frac{h\sin x}{2}.$$

Pour le deuxième couple perturbateur, on a $Q = \omega_1^2 F(q, q')$. Les fonctions totales X et Y sont données par les formules

$$2X = \varepsilon y - h\cos x - H(y), \qquad 2Y = -h\sin x - J(y), \tag{19}$$

en posant

$$\begin{cases} H(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(y\cos\varphi, -\omega y\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \\ J(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(y\cos\varphi, -\omega y\sin\varphi)\sin\varphi\, d\varphi. \end{cases} \tag{20}$$

Les *points de synchronisation* sont donnés par

$$h\cos x = \varepsilon y - H, \qquad h\sin x = -J \tag{21}$$

ou

$$h^2 = (\varepsilon y - H)^2 + J^2 \tag{22}$$

et

$$\operatorname{tang} x = \frac{J}{H - \varepsilon y}. \tag{23}$$

L'équation (22) *détermine l'amplitude* du mouvement entretenu et la formule (23) donne son *avance de phase* sur le couple.

Les équations (17) s'écrivent, en posant $r = \frac{\rho\lambda}{2}$ et tenant compte de (21),

$$\rho y\xi = -\xi J + y\eta(\varepsilon - H'), \qquad \rho y\eta = \xi(H - \varepsilon y) - y\eta J'.$$

D'où *l'équation de stabilité*

$$(24) \qquad (\rho y + J)(\rho + J') + (H - \varepsilon y)(H' - \varepsilon) = 0.$$

Les *conditions de stabilité* sont :

$$(25) \qquad J + yJ' > 0, \qquad JJ' + (H - \varepsilon y)(H' - \varepsilon) > 0.$$

Elles expriment que *les fonctions* yJ *et* $J^2 + (H - \varepsilon y)^2$ *sont croissantes au point de synchronisation.*

15. *Cas où il n'y a pas de couple synchronisant.* — On a $h = 0$. Les équations de synchronisation se réduisent à

$$(26) \qquad \varepsilon y = H, \qquad J = 0.$$

La seconde *détermine l'amplitude* y *du mouvement entretenu*. La première nous donne ensuite $\varepsilon = \frac{H}{y}$.

L'accroissement de période ΔT provenant des couples perturbateurs est donnée, au second ordre près en λ, par la formule évidente

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega} = \frac{\lambda\varepsilon}{2}.$$

On en déduit le *retard diurne*, en secondes,

$$(27) \qquad R = 43200\,\lambda\varepsilon = 43200\,\frac{\lambda H}{y}.$$

Si l'on appelle C le *couple perturbateur total*, on a, d'après (20),

$$(28) \qquad R = \frac{43200}{\pi M \omega_1^2 y} \int_0^{2\pi} C \cos\varphi_1 \, d\varphi_1.$$

On retrouve la *formule d'Airy*, classique en Chronométrie.

L'équation (24) admet visiblement la racine $\rho = 0$, qui est à écarter (n° 11), et la racine $\rho = -J'$. La *condition de stabilité* est donc $J' > 0$.

On peut l'interpréter d'une façon concrète. D'après les formules (15) et (19), le travail $\mathfrak{T}(y)$ des forces perturbatrices pendant une période est, à un facteur constant et positif près, égal à $-yJ$. Donc, $\mathfrak{T}'(y)$ a le signe contraire à $yJ' + J$, c'est-à-dire à J', d'après (26). Pour que le régime soit stable, il faut donc et il suffit *que le travail* $\mathfrak{T}(y)$ *décroisse quand* y *traverse, en croissant, l'amplitude* y_1 *des oscillations périodiques.*

Ce résultat est d'ailleurs intuitif. Si y est légèrement supérieur à y_1, le travail est négatif; l'amplitude diminue. Si y est légèrement inférieur à y_1, le travail est positif; l'amplitude augmente. Dans les deux cas, y se rapproche de y_1.

16. *Calcul des fonctions* H *et* J *pour un échappement.* — Dans tout ce mémoire, nous emploierons, en ce qui concerne les échappements, les notations suivantes.

La valeur absolue du couple exercé sur le balancier pendant chaque impulsion sera $\lambda M\omega_1^2\Gamma$, en appelant toujours M le moment d'inertie du balancier et ω_1 sa pulsation propre. Quant à Γ, c'est évidemment un *nombre* positif, que nous supposerons constant (¹).

Dans la pratique, l'impulsion commence avant le point mort et se termine après; nous appellerons i_1 et i_2 les valeurs correspondantes de l'élongation, prises en valeur absolue. L'*angle d'impulsion* est $i = i_1 + i_2$; l'*angle de dégagement* est $D = i_2 - i_1$; il est toujours positif, sauf pour les *échappements à coup perdu* bien réglés.

Posons

$$i_1 = y\cos\alpha_1, \qquad i_2 = y\cos\alpha_2, \qquad 0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}.$$

On a

$$F = -\Gamma \quad \text{pour} \quad \alpha_1 < \varphi_1 < \pi - \alpha_2, \qquad F = +\Gamma \quad \text{pour} \quad \alpha_1 + \pi < \varphi_1 < 2\pi - \alpha_2,$$

et $F = 0$ pour les autres valeurs de φ_1 comprises entre zéro et 2π. On en déduit, par un calcul élémentaire,

$$H = \frac{2\Gamma}{\pi}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2) = \frac{2\Gamma}{\pi}\left(\sqrt{1 - \frac{i_1^2}{y^2}} - \sqrt{1 - \frac{i_2^2}{y^2}}\right) = \frac{\Gamma}{\pi}\left(\frac{i_2^2 - i_1^2}{y^2} + \dots\right);$$

d'où la formule *approchée*, si y est grand vis-à-vis de i_2,

$$H = \frac{\Gamma i D}{\pi y^2}. \tag{29}$$

De même, $J = -\frac{2\Gamma}{\pi}(\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1)$, soit, *rigoureusement*,

$$J = -\frac{2\Gamma i}{\pi y} = -\frac{E}{\pi y}, \tag{30}$$

en appelant $\lambda M\omega_1^2 E$ l'*énergie fournie par période*. Cette dernière formule résulte aussi de la formule (15).

17. *Même calcul pour un frottement visqueux.* — Nous désignerons toujours un tel couple de frottement par la notation $-\lambda M a\omega_1 q'$, de sorte que le *décrément logarithmique* correspondant sera $\delta = \lambda\pi a$. On a $F = -\frac{aq'}{\omega_1}$; d'où, en confondant ω_1 avec ω,

$$H = 0, \qquad J = ay. \tag{31}$$

(¹) C'est à peu près ce qu'on s'efforce de réaliser dans l'industrie horlogère. Mais, il y aurait intérêt à faire décroître le couple pendant l'impulsion, pour diminuer le défaut d'isochronisme apporté par l'échappement (*Cf. Annales françaises de Chronométrie*, 1932).

18. *Même calcul pour un frottement constant.* — Nous désignerons toujours un tel couple de frottement par la notation $\lambda M\omega_1^2 f$, f désignant un nombre constant et positif, représentant la *moitié de l'angle d'équilibre* évalué en radians. On a

$$F = +f \quad \text{pour} \quad 0 < \varphi_1 < \pi, \qquad F = -f \quad \text{pour} \quad \pi < \varphi_1 < 2\pi;$$

d'où

$$H = 0, \qquad J = \frac{4f}{\pi}. \tag{32}$$

La seconde formule résulte aussi, en toute évidence, de la formule (15).

19. *Même calcul pour un couple correctif proportionnel à q^3.* — Écrivons-le $\lambda M k\omega_1^2 q^3$, k désignant un coefficient constant. Par exemple, pour le pendule, $\lambda k = \frac{1}{6}$. On a $F = kq^3$; d'où

$$H = \frac{3k}{4} y^3, \qquad J = 0. \tag{33}$$

20. *Même calcul pour une butée élastique.* — Supposons qu'un ressort *très faible* exerce sur le balancier le couple $\lambda M\omega_1^2 k'(a - q)$ pour $q > a > 0$, k' désignant un facteur constant et positif. Posons

$$a = y\cos\alpha, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

On a

$$F = k' y(\cos\alpha - \cos\varphi_1) \qquad \text{pour} \quad -\alpha < \varphi_1 < \alpha.$$

D'où

$$H = \frac{k' y}{\pi}(\sin\alpha\cos\alpha - \alpha), \qquad J = 0. \tag{34}$$

Bien entendu, $H = 0$ si $y < a$.

21. *Synchronisation par les forces précédentes.* — En additionnant les valeurs ci-dessus calculées, on obtient

$$H = \frac{\Gamma i D}{\pi y^2} + \frac{3k}{4} y^3 + \frac{k' y}{\pi}(\sin\alpha\cos\alpha - \alpha), \qquad J = -\frac{2\Gamma i}{\pi y} + ay + \frac{4f}{\pi}. \tag{35}$$

L'équation (22) est compliquée. Si l'on supprime la butée, l'échappement et le couple correctif, elle se réduit à

$$h^2 = \varepsilon^2 y^2 + \left(ay + \frac{4f}{\pi}\right)^2. \tag{36}$$

Elle est du second degré et a une seule racine positive, à condition que l'on ait $h > \frac{4f}{\pi}$. Cette condition montre que *la synchronisation par couple sinusoïdal n'est possible que si le couple maximum dépasse une certaine limite proportionnelle au frottement constant*, ce que ne prévoit pas la théorie élémentaire.

En supprimant le frottement constant, on doit évidemment retrouver les résultats donnés par cette dernière théorie. C'est ce qu'il est aisé de vérifier, en se reportant aux formules (22) et (23).

L'équation (24) a pour racines $p = -a \pm j\varepsilon$; d'où, en prenant le temps pour variable indépendante, $r = \frac{\lambda\omega}{2}(-a \pm j\varepsilon)$. L'équation caractéristique des oscillations a pour racines $-\frac{\lambda a\omega}{2} \pm j\omega$. On voit que, dans le régime transitoire précédant le régime synchronisé, les fluctuations d'amplitude et de phase s'amortissent avec la même rapidité que les oscillations libres; mais leur fréquence est beaucoup plus petite; elle est égale à celle des oscillations multipliée par $\frac{\lambda\varepsilon}{2} = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega}$, conformément à la théorie élémentaire des battements.

22. Examinons la *stabilité*.

La fonction $y\mathrm{J} = ay^2 + \frac{4f}{\pi}y - \frac{2\Gamma i}{\pi}$ est croissante; donc, la première condition (25) est vérifiée. La seconde est plus compliquée. Écrivons-la dans le cas $\mathrm{D} = k = k' = 0$; on trouve

$$y^4(a^2+\varepsilon^2) + \frac{4fa}{\pi}y^3 + 8\frac{f\Gamma i}{\pi^2}y - 4\Gamma^2 i^2 > 0. \tag{37}$$

Le premier membre admet une seule racine positive y_1; *pour que la synchronisation sur l'amplitude y soit stable, il faut et il suffit que cette amplitude dépasse* y_1. *S'il n'y a pas d'échappement, cette condition est toujours remplie.*

Supprimons l'échappement et rétablissons le couple correctif (cas du pendule ayant de grandes oscillations). Nous obtenons

$$\frac{27k^2}{16}y^5 - 3\varepsilon k y^3 + y(a^2+\varepsilon^2) + \frac{4af}{\pi} > 0.$$

D'après le théorème de Descartes, le premier membre a zéro ou deux racines positives. Dans le deuxième cas, il faut que y soit extérieur à ces racines. Si $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire *si l'on est juste à la résonance, le mouvement est toujours stable.*

23. *Entretien par l'échappement.* — L'amplitude du mouvement entretenu est donnée par l'équation du second degré

$$\pi a y^2 + 4fy - 2\Gamma i = 0,$$

qui a une seule racine positive. Le retard diurne est donné par (27) et (35). Il est nul si $\mathrm{D} = 0$; nous dirons alors que l'échappement est *isochrone*.

La condition de stabilité $\mathrm{J}' > 0$ *est vérifiée identiquement.*

24. *Oscillations libres.* — Supprimons aussi l'échappement. Si $f > 0$, l'équation $\mathrm{J} = 0$ n'a plus de racine positive; *le mouvement ne peut pas tendre asympto-*

tiquement vers un mouvement approximativement sinusoïdal. Effectivement, la théorie élémentaire des oscillations libres avec frottement visqueux et frottement constant nous apprend que *le mouvement s'arrête* définitivement au bout d'un nombre fini d'oscillations, la position finale du balancier étant une position quelconque intérieure à l'angle d'équilibre.

Par contre, *s'il n'y a pas de frottement constant*, l'équation $J = 0$ a la racine $y = 0$. Cette racine est acceptable (remarque du n° 3), car la fonction f_1 de la formule (12) est divisible par y. On pourrait calculer les valeurs asymptotiques de x, y et q et comparer avec ce que donne l'intégration directe, qui est évidemment plus simple. Mais, ce calcul n'a pas grand intérêt.

CHAPITRE III.

LES BALANCIERS A SUPPORT MOBILE.

25. *Définition du système.* — Nous avons *n balanciers* (B_1), (B_2), ..., (B_n), dont les axes sont fixés à un même *support* (B_0), lequel possède *un degré de liberté*, représenté par la variable q_0. Nous appelons q_i l'élongation de (B_i) par rapport à un trièdre de référence lié au support.

Chacun des mobiles (B_i) est soumis à une *force* ou à un *couple de rappel, proportionnel à* q_i et à des *forces perturbatrices dépendant uniquement de* q_i *et* q_i'.

La force vive du système est de la forme

$$2T = M\left(\sum_{i=0}^{n} q_i'^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} c_i q_0' q_i'\right), \tag{38}$$

les c_i étant des facteurs constants, que nous supposerons finis, de sorte que *le couplage par inertie est très faible*.

Les forces principales sont toujours définies par la formule (6), sauf que i varie de zéro à n. Les ω_i d'indice > 0 sont les *pulsations propres des balanciers* (support calé); ω_0 est la *pulsation propre du support* (balanciers calés).

Les forces perturbatrices sont toujours définies par la formule (7); mais, *chaque fonction* Q_i *dépend seulement de* q_i *et de* q_i'. Comme au n° 13, nous poserons

$$Q_i = \omega_i^2 F_i(q_i, q_i').$$

26. *Forces perturbatrices fictives.* — Les équations de Lagrange s'écrivent

$$q_i'' + \omega_i^2 q_i = \lambda(Q_i - c_i q_0'') \qquad (i > 0);$$

$$Q_0'' + \omega_0^2 q_0 = \lambda\left(Q_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i q_i''\right).$$

On en tire

$$q_i'' + \omega_i^2 q_i = \lambda Q_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n);$$

avec

$$Q_0 = \frac{Q_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \omega_i^2 q_i - \lambda \left(c^2 \omega_0^2 q_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i Q_i \right)}{1 - \lambda^2 c^2},$$

$$Q_i = Q_i + c_i \frac{\omega_0^2 q_0 + \lambda \left[-Q_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i (-\omega_i^2 q_i + \lambda Q_i) \right]}{1 - \lambda^2 c^2} \qquad (i > 0),$$

$$c^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

On retombe sur le problème du n° 2, à condition de considérer les Q_i comme les coefficients du travail virtuel de forces perturbatrices comprenant les forces perturbatrices véritables et des forces perturbatrices *fictives*. Ces Q_i dépendent de λ; mais, notre théorie continue à être valable, moyennant la *réserve faite à la fin du* n° 8.

Or, dans $f_0 \cos\varphi_0$ par exemple, figure le terme $q_i \cos\varphi_0 = \gamma_i \cos\varphi_i \cos\varphi_0$, qui n'est pas divisible par γ_0. Ses dérivées par rapport à γ_0 et x_0 n'ont pas de bornes fixes, si γ_0 tend vers zéro en même temps que λ. De même, la présence du terme $q_0 \cos\varphi_i$ dans Q_i nous conduit à une conclusion analogue, si γ_i tend vers zéro avec λ. On en conclut que *si un point de synchronisation est tel que, pour* $\lambda = 0$, *le support ou un balancier soit au repos, notre théorie cesse d'être justifiée*. Il sera donc inutile de poursuivre l'étude d'un tel cas.

Dans les autres cas, nous réduirons les Q_i donnés par les formules ci-dessus à leur première approximation, soit

$$(39) \qquad \bar{Q}_0 = Q_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \omega_i^2 q_i, \qquad \bar{Q}_i = Q_i + c_i \omega_0^2 q_0.$$

Nous commettrons une erreur infiniment petite sur la position des points de synchronisation; mais, rien ne sera changé en ce qui concerne leur stabilité.

27. *Calcul des fonctions* X_i, Y_i. — Nous sommes dans le cas n° 10; donc, $N = 1$. Appliquons les formules (14). On a

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi_i \cos\varphi_k \, d\varphi = \pi \cos(x_k - x_i), \qquad \int_0^{2\pi} \cos\varphi_i \sin\varphi_k \, d\varphi = \pi \sin(x_k - x_i),$$

si $m_i = m_k$; ces intégrales sont nulles si $m_i \neq m_k$.

Dès lors, *supposons* $m_i = m_0$ *pour* $i \leq p$ *et* $m_i \neq m_0$ *pour* $i > p$; le nombre p étant ≥ 0 et $\leq n$. On a

$$2X_i = m_i K_i, \qquad 2Y_i = -m_i J_i, \qquad \text{pour} \quad i > p; \tag{40}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X_i = m_0 | K_i - \gamma_0 c_i \cos(x_i - x_0)|, \qquad 2Y_i = m_0 | -J_i - \gamma_0 c_i \sin(x_i - x_0)|, \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad 0 < i \leq p; \end{array} \right. \tag{41}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X_0 = m_0 \left[K_0 - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} c_i \gamma_i \cos(x_i - x_0) \right], \\ 2Y_0 = m_0 \left[-J_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} c_i \gamma_i \sin(x_i - x_0) \right]; \end{array} \right. \tag{42}$$

en posant

$$K_i = \varepsilon_i \gamma_i - H_i \tag{43}$$

et calculant les H_i, J_i par les formules (20).

28. *Points de synchronisation.* — Nous avons d'abord

$$J_i(\gamma_i) = 0, \qquad \varepsilon_i = \frac{H_i(\gamma_i)}{\gamma_i} \qquad \text{pour} \quad i > p.$$

Puis,

$$\gamma_0 c_i \cos(x_i - x_0) = K_i, \qquad \gamma_0 c_i \sin(x_i - x_0) = -J_i, \qquad 0 < i \leq p; \tag{44}$$

$$\sum_{i=1}^{p} c_i \gamma_i \cos(x_i - x_0) = K_0, \qquad \sum_{i=1}^{p} c_i \gamma_i \sin(x_i - x_0) = J_0. \tag{45}$$

D'où l'on déduit

$$\gamma_0^2 c_i^2 = K_i^2 + J_i^2, \qquad 0 < i \leq p; \tag{46}$$

$$\gamma_0 K_0 = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i K_i, \tag{47}$$

$$\sum_{i=0}^{p} \gamma_i J_i = 0. \tag{48}$$

Nous obtenons ainsi $p+2$ équations entre les $p+1$ inconnues $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$. En éliminant celles-ci, nous aurons une *relation* (E) *entre* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$. Cette relation étant satisfaite, la solution commune aux équations (46) à (48) nous donnera $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$. Nous aurons enfin les $x_i - x_0$ par (44).

29. La relation (E) détermine ω, donc la *période du mouvement entretenu*. Posons

$$\omega_i^2 = m_i^2 \Omega^2 (1 + \lambda \alpha_i), \tag{49}$$

Ω étant arbitrairement choisi, sous cette seule réserve que les α_i soient finis.

D'où il résulte que l'on peut imposer aux α_i une relation linéaire et homogène à coefficients constants arbitraires.

A l'inconnue ω substituons l'inconnue z définie par

$$\omega^2 = \Omega^2(1 - \lambda z). \tag{50}$$

En comparant avec (8), on a

$$\varepsilon_i = \frac{\alpha_i - z}{1 - \lambda z}, \tag{51}$$

ou, *en première approximation*,

$$\varepsilon_i = \alpha_i - z. \tag{52}$$

Portant dans la relation (E), *on obtient l'équation déterminant* z, donc ω. Ayant une racine, on en déduit *tous* les ε_i, en particulier ceux d'indice $> p$. Portant dans (52), on a les α_i d'indice $> p$, à $O(\lambda)$ près. Donc, *pour que le système puisse avoir un mouvement périodique, il faut que les* ω_i *non voisins de* ω_n *aient des valeurs déterminées, à* $O(\lambda^2)$ *près; tandis que les* ω_i *voisins de* ω_n *sont seulement déterminés à* $O(\lambda)$ *près.*

Cette condition étant supposée remplie, chaque y_i d'indice $> p$ est déterminé par $J_i(y_i) = 0$; mais, nous ne pouvons pas calculer x_i. Ceci nous prouve qu'*en première approximation, chaque balancier* (B_i) *dont la fréquence propre est éloignée de celle du support, oscille comme en régime autonome*, c'est-à-dire comme si le support était fixe.

Si l'on veut calculer l'effet du couplage sur ces balanciers, il faut garder l'expression exacte des Q_i (n° 26) et à condition que le support et aucun des balanciers ne soit au repos en première approximation.

30. *Retard diurne de chaque balancier.* — Supposons que le balancier (B_i) soit l'*organe réglant d'un appareil horaire* (montre ou pendule) et cherchons quel sera le *retard diurne que manifestera cet appareil sous l'effet du couplage.*

L'heure indiquée au bout de p oscillations doubles est $H = p\frac{2\pi}{\omega_i}$. Or, si t augmente de $\frac{2\pi}{\omega}$, φ_i augmente de $2\pi m_i$, puisque x_i reprend la même valeur. Donc, (B_i) accomplit m_i oscillations pendant le temps $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Le retard pris pendant ce temps est

$$t - H = 2\pi\left(\frac{1}{\omega} - \frac{m_i}{\omega_i}\right) = 2\pi\frac{\omega_i - m_i\omega}{\omega\omega_i}.$$

Le retard diurne s'en déduit en multipliant par $\frac{86400}{t} = \frac{86400\,\omega}{2\pi}$, ce qui donne

$$86400\frac{\omega_i - m_i\omega}{\omega_i} = 86400\left[1 - (1 + \lambda\varepsilon_i)^{-\frac{1}{2}}\right] = 86400\left(\frac{\lambda\varepsilon_i}{2} - \frac{3\lambda^2\varepsilon_i}{8} + \dots\right).$$

Ceci représente le retard provenant de l'ensemble de toutes les perturbations. Pour avoir le *retard dû au couplage seul*, il faut retrancher la valeur correspondant à $c_i = 0$, qui représente le *retard autonome* de (B_i). *Si l'on appelle* ε_i^0 *la valeur de* ε_i *pour* $c_i = 0$, on voit que *le retard dû au couplage est*

$$R = 43200\lambda(\varepsilon_i - \varepsilon_i^0)\left[1 - \frac{3}{4}\lambda(\varepsilon_i + \varepsilon_i^0) + \dots\right]. \tag{53}$$

Si l'on s'en tient à la première approximation, on réduira le crochet à l'unité.

31. *Stabilité.* — Les formules (40) nous montrent d'abord que *la stabilité des balanciers d'indice* $> p$ *est la même qu'en marche autonome* (n° 14). Pour les autres, posons

$$2r = \rho\lambda m_0, \qquad K_i = \varepsilon_i \gamma_i - \Pi_i, \qquad \xi_i - \xi_0 = u_i.$$

En nous reportant aux formules (41') et (42), puis tenant compte des équations (44), nous avons le système

$$\begin{aligned}
\rho\gamma_0^2\xi_0 &= \gamma_{i0}\gamma_0^2 K_0' - \sum_{i=1}^{p}\gamma_i[\gamma_i K_i + u_i J_i],\\
\rho\gamma_i(\xi_0 + u_i) &= \gamma_{i0}\gamma_i K_i - [\gamma_{i0} K_i + u_i J_i],\\
\rho\gamma_{i0}\gamma_0^2 &= -\gamma_{i0}\gamma_0^2 J_0' - \sum_{i=1}^{p}\gamma_i[\gamma_i J_i - u_i K_i],\\
\rho\gamma_{i0}\gamma_i &= -\gamma_{i0}\gamma_i J_i' - [-\gamma_{i0} J_i + u_i K_i].
\end{aligned}$$

En éliminant ξ_0, u_i, γ_{i0} et supprimant le facteur ρ de la première colonne du déterminant, on obtient directement l'*équation de stabilité* sous la forme que donne la règle du n° 12 :

$$\begin{vmatrix}
\gamma_0^2 & \gamma_1 J_1 & \gamma_2 J_2 & \dots & \gamma_p J_p & -\gamma_0^2 K_0' & K_1 & K_2 & \dots & K_p\\
\gamma_1 & \rho\gamma_1 + J_1 & 0 & \dots & 0 & K_1 & -K_1' & 0 & \dots & 0\\
\gamma_2 & 0 & \rho\gamma_2 + J_2 & \dots & 0 & K_2 & 0 & -K_2' & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\gamma_p & 0 & 0 & \dots & \rho\gamma_p + J_p & K_p & 0 & 0 & \dots & -K_p'\\
0 & -\gamma_1 K_1 & -\gamma_2 K_2 & \dots & -\gamma_p K_p & \gamma_0^2(\rho + J_0') & J_1 & J_2 & \dots & J_p\\
0 & K_1 & 0 & \dots & 0 & -J_1 & \rho + J_1' & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & K_2 & \dots & 0 & -J_2 & 0 & \rho + J_2' & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & \dots & K_p & -J_p & 0 & 0 & \dots & \rho + J_p'
\end{vmatrix} = 0. \tag{54}$$

32. *Cas où toutes les périodes propres sont voisines.* — Tous les m_i sont égaux et l'on peut les supposer égaux à *un*. On a $p = n$ et les équations (40) disparaissent.

Supposons que les forces perturbatrices se réduisent, pour chaque (B_i), à un *frottement visqueux* et à un *échappement isochrone à force constante*; adoptons

les notations des nos 16 et 17. Nous obtenons immédiatement

$$H_i = 0, \qquad J_i = a_i y_i - \frac{E_i}{\pi y_i}. \tag{55}$$

Les équations (46) à (48) deviennent

$$\varepsilon_i^2 y_i^2 + \left(\frac{E_i}{\pi y_i} - a_i y_i\right)^2 = c_i^2 y_0^2, \qquad 1 \leq i \leq n; \tag{56}$$

$$\varepsilon_0 y_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i^2. \qquad \sum_{i=0}^{n} \frac{E_i}{\pi} = \sum_{i=0}^{n} a_i y_i^2. \tag{57}$$

L'élimination des y_i est encore compliquée.

33. Supposons qu'il n'y ait *qu'un échappement, affecté au support*. Nous avons

$$y_i^2 = y_0^2 \frac{c_i^2}{\delta_i}, \qquad \delta_i = \varepsilon_i^2 + a_i^2. \tag{58}$$

Portons dans (57) :

$$\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i c_i^2}{\delta_i}, \tag{59}$$

$$E_0 = \pi y_0^2 \left[a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i c_i^2}{\delta_i} \right]. \tag{60}$$

L'équation (59) est l'équation de compatibilité. Si l'on y remplace ε_i par $\alpha_i - z$, on obtient une équation de degré $2n+1$ en z; donc, *il y a* $2n+1$ *points de synchronisation*, réels ou imaginaires.

Ayant une racine de cette équation, on a y_0 par (60), puis y_i par (58) et enfin les $x_i - x_0$ par (44).

34. Supposons maintenant que *l'échappement unique soit affecté au balancier* (B_1). On a encore (58), sauf pour $i = 1$. Puis,

$$\varepsilon_1 y_1^2 = P y_0^2, \qquad P = \varepsilon_0 - \sum_{i=2}^{n} \frac{\varepsilon_i c_i^2}{\delta_i}; \tag{61}$$

$$\frac{E_1}{\pi} - a_1 y_1^2 = Q y_0^2, \qquad Q = a_0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i c_i^2}{\delta_i}, \tag{62}$$

$$\varepsilon_1^2 y_1^4 + Q^2 y_0^4 = c_1^2 y_0^2 y_1^2,$$

ou

$$\varepsilon_1 (P^2 + Q^2) = c_1^2 P. \tag{63}$$

Cette dernière équation est de degré $4n-1$ en z. Donc, *il y a* $4n-1$ *points de synchronisation.*

Ayant z, on a

$$y_1^2 = \frac{PE_1}{\pi(Pa_1 + Q\varepsilon_1)}; \tag{64}$$

puis, y_0 par (61) et les y_i par (58).

35. *Cas où il y a un seul balancier.* — Nous avons $n = 1$. Les équations (46) à (48) se réduisent à (¹)

$$c^2 y_0^2 = K_1^2 + J_1^2, \qquad y_0 K_0 = y_1 K_1, \qquad y_0 J_0 = y_1 J_1 = 0, \tag{65}$$

en reprenant une notation du n° 31.

Supposons *que le support soit seulement soumis à un frottement visqueux*; on a, d'après (55),

$$H_0 = 0, \qquad J_0 = a_0 y_0, \qquad K_0 = \varepsilon_0 y_0.$$

Les deuxième et troisième équations (65) deviennent

$$\varepsilon_0 y_0^2 = y_1 K_1, \qquad a_0 y_0^2 = -y_1 J_1. \tag{66}$$

Portons dans la première équation (65) :

$$y_0^2 \delta_0 = y_1^2 c^2. \tag{67}$$

Portons dans (66) :

$$\varepsilon_0 c^2 y_1 = \delta_0 K_1, \qquad a_0 c^2 y_1 = -\delta_0 J_1. \tag{68}$$

Il reste à éliminer y_1 entre les deux équations.

Supposons *que le balancier soit soumis à un échappement, à un frottement visqueux et à un frottement constant* et adoptons les notations des n°s 16 à 18. Nous avons

$$J_1 = \frac{-E}{\pi y_1} + a_1 y_1 + \frac{4f}{\pi}, \qquad K_1 = \varepsilon_1 y_1 - \frac{ED}{2\pi y_1^2}.$$

Portons dans (68) :

$$y_1 = \frac{ED\delta_0}{2\pi(\varepsilon_1\delta_0 - \varepsilon_0 c^2)}, \qquad y_1^2(a_0 c^2 - a_1\delta_0) + 4y_1\frac{f\delta_0}{\pi} - \frac{E\delta_0}{\pi} = 0. \tag{69}$$

L'élimination de y_1 est élémentaire et donne une équation du *huitième degré* en z, trop compliquée pour qu'on puisse en tirer parti.

Si l'on suppose l'échappement isochrone, elle se réduit à

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0^2 + a_0^2) - \varepsilon_0 c^2 = 0, \tag{70}$$

qui est du *troisième degré* en z et qui *dépend uniquement du coefficient de couplage et du frottement visqueux appliqué au support*. Dans ce cas, y_1 est la racine positive de la deuxième équation (69).

(¹) Nous supprimons l'indice de c_1.

36. Étudions la *stabilité*. L'équation (54) se réduit à l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} y_0^2 & y_1 J_1 & -y_0^2 K_0' & K_1 \\ y_1 & \rho y_1 + J_1 & K_1 & -K_1' \\ 0 & -y_1 K_1 & y_0^2(\rho + J_0') & J_1 \\ 0 & K_1 & -J_1 & \rho + J_1' \end{vmatrix} = 0.$$

On a avantage à développer par la règle de Laplace, suivant les deux premières lignes.

On peut aussi remarquer que le support et le balancier jouent, dans le cas actuel, des rôles symétriques. En gardant les variables ξ_0, ξ_1 du n° 31, on obtient l'équation caractéristique sous la forme *symétrique*

$$\begin{vmatrix} \rho y_0 + J_0 & -J_0 & -y_0 K_0' & K_0 \\ -J_1 & \rho y_1 + J_1 & K_1 & -y_1 K_1' \\ K_0 & -K_0 & y_0(\rho + J_0') & -J_0 \\ -K_1 & K_1 & -J_1 & y_1(\rho + J_1') \end{vmatrix} = 0.$$

On vérifie qu'elle n'a pas de terme constant et, après suppression du facteur ρ, on obtient, tous calculs faits, *l'équation de stabilité* du troisième degré

$$\rho^3 + A\rho^2 + B\rho + C = 0,$$

avec

$$(71)\quad \begin{cases} A = J_0' + J_1' + \dfrac{J_0}{y_0} + \dfrac{J_1}{y_1}, \\ B = J_0' J_1' + (J_0' + J_1')\left(\dfrac{J_0}{y_0} + \dfrac{J_1}{y_1}\right) + \dfrac{2K_0K_1 - J_0J_1}{y_0 y_1} + \dfrac{K_0 K_0'}{y_0} + \dfrac{K_1 K_1'}{y_1}, \\ C = \dfrac{J_1'}{y_0}(J_0 J_0' + K_0 K_0') + \dfrac{J_0'}{y_1}(J_1 J_1' + K_1 K_1') \\ \quad + \dfrac{K_0 K_1 (J_0' + J_1') + J_0 K_1 K_1' + J_1 K_0 K_0'}{y_0 y_1} + \left(\dfrac{J_0}{y_0} + \dfrac{J_1}{y_1}\right)\dfrac{K_0 K_1 - J_0 J_1}{y_0 y_1}. \end{cases}$$

Les *conditions de stabilité* sont

$$(72)\qquad A > 0, \quad C > 0, \quad AB - C > 0.$$

37. Voyons ce qu'elles deviennent avec les hypothèses du n° 35. En tenant compte de (69), on a

$$J_1 = -y_1 k a_0, \qquad J_1' = a_0(k + 2q), \qquad K_1 = y_1 k \varepsilon_0, \qquad K_1' = 3\varepsilon_1 - 2k\varepsilon_0,$$

en posant

$$(73)\qquad k = \frac{c^2}{\delta_0}, \qquad q = \frac{a_1}{a_0} + \frac{2f}{a_0 y_1}.$$

Portant dans (71), on trouve

$$A = 2a_0(1+q), \qquad B = a_0^2[1+2k-k^2+2q(2-k)] + \varepsilon_0^2(1+k)^2 + 3k\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0),$$

$$\frac{C}{2a_0} = (k+q)[a_0^2(1-k) + \varepsilon_0^2(1+k)] + 3k\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0).$$

Puis,

$$\frac{AB-C}{2a_0} = a_0^2(2q+1+k)(2q+1-kq) + \varepsilon_0^2(1+k)(1+kq) + 3kq\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0).$$

La première condition (72) est vérifiée identiquement, car $q > 0$. Il reste donc

$$(k+q)[a_0^2(1-k) + \varepsilon_0^2(1+k)] + 3k\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0) > 0, \tag{74}$$

$$a_0^2(2q+1+k)(2q+1-qk) + \varepsilon_0^2(1+k)(1+kq) + 3kq\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0) > 0. \tag{75}$$

Dans le cas de l'échappement isochrone, on a, d'après (70), $\varepsilon_1 = k\varepsilon_0$. La condition (74) se réduit à

$$a_0^2(1-k) + \varepsilon_0^2(1+k) > 0, \tag{76}$$

car $k+q > 0$. Le dernier terme de (75) disparaît.

38. *Courbes de marche. — Le balancier étant donné*, supposons qu'on fasse *varier la fréquence propre du support* et proposons-nous de construire une *courbe représentant la variation de la fréquence du balancier quand le support oscille.*

Appelons $43200\lambda x$ le *retard diurne du support* (*balancier calé*) *sur le balancier* (*support calé*) et $43200\lambda X$ le *retard diurne du balancier* (*support libre*) *sur le balancier* (*support calé*). Nous définirons la courbe ci-dessus, que nous appellerons *courbe de marche*, en *portant x en abscisse et X en ordonnée.*

Dans la formule (49), prenons $\Omega = \omega_1$; donc $\alpha_1 = 0$. Appelons $43200\lambda X_0$ le *retard diurne dû à l'échappement du balancier.* Comme le support n'a pas de défaut d'isochronisme, on a $x = -\alpha_0 - X_0$. Puis, d'après (53), $X = \varepsilon_1 - X_0$. Comme $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \alpha_0$, on a

$$X = \varepsilon_1 - X_0, \qquad x = X - \varepsilon_0. \tag{77}$$

D'autre part, si l'on appelle A l'*amplitude autonome* du balancier, on a [1] (n° 23)

$$E = \pi a_1 A^2 + 4fA, \qquad X_0 = \frac{ED}{2\pi A^2}. \tag{78}$$

Posons $\varepsilon_0 = a_0 u$; d'où $\hat{c}_0 = a_0^2(1+u^2)$. Posons ensuite

$$\frac{y_1}{A} = v, \qquad \frac{c^2}{a_0 a_1} = \alpha, \qquad \frac{2f}{\pi a_1 A} = \beta. \tag{79}$$

---

[1] On obtient aussi ces formules en faisant $c = 0$ dans (69).

La deuxième équation (69), puis la première nous donnent

$$v = \frac{\sqrt{(\beta+1)^2 + \frac{\alpha(1+2\beta)}{1+u^2}} - \beta}{1 + \frac{\alpha}{1+u^2}}, \tag{80}$$

$$\varepsilon_1 = a_1 \alpha \frac{u}{1+u^2} + \frac{X_0}{c^3}. \tag{81}$$

Portant dans (77), il vient

$$X = a_1 \alpha \frac{u}{1+u^2} + X_0 \left(\frac{1}{v^3} - 1 \right), \qquad x = X - a_0 u. \tag{82}$$

Posons enfin

$$X' = a_0 X, \qquad x' = a_0 x, \qquad s = a_0 X_0, \qquad p = a_0^2, \tag{83}$$

et *supposons* $c = 1$, ce qui revient à changer λ. Les formules (82) deviennent (1)

$$X' = \frac{u}{1+u^2} + s \left(\frac{1}{v^3} - 1 \right), \qquad x' = X' - pu. \tag{84}$$

Pour se rendre compte des différentes formes que peut affecter la courbe de marche, on peut évidemment se borner à construire les courbes définies par les équations paramétriques (84), lesquelles sont très accessibles au calcul numérique (2).

Remarque. — Au lieu de porter en abscisse une quantité proportionnelle au retard *effectif* du support sur le balancier, on peut porter une quantité proportionnelle au retard *théorique* du support sur le balancier, ce retard théorique étant évalué en ne tenant pas compte du retard apporté par l'échappement sur la marche du balancier. Ceci revient à ajouter X_0 au second membre de la deuxième formule (77), donc s au second membre de la deuxième formule (84). *La nouvelle courbe de marche se déduit donc de la précédente par la translation s suivant l'axe* Ox.

39. Sur la courbe de marche, il faut séparer *l'arc d'instabilité*. Avec les notations du n° 37, on a

$$k = \frac{1}{p(1+u^2)}, \qquad q = \frac{3+v}{p\alpha v}. \tag{85}$$

---

(1) Ces formules ne sont pratiquement exactes que si $\lambda X = \frac{\lambda X'}{a_0}$ et $\lambda x = \frac{\lambda x'}{a_0}$ sont *très petits*.

(2) On peut même construire les courbes de marche dans le *cas où les forces perturbatrices appliquées au balancier et au support sont quelconques*. Il suffit de prendre y_1 pour paramètre. La deuxième équation (65) donne y_0. Portant dans les deux autres, on en déduit ε_0 et ε_1. Portant dans (77), on a x et X en fonction de y_1. Mais, les calculs numériques peuvent évidemment être plus compliqués qu'avec les hypothèses faites au n° 35.

Les conditions (74) et (75) s'écrivent, en remarquant que $\varepsilon_1 - k\varepsilon_0 = \frac{s}{a_0 v^3}$,

$$(86) \qquad su > \frac{pv^3}{3k}(k+q)[k-1-u^2(k+1)],$$

$$(87) \qquad su > \frac{pv^3}{3kq}[(k+2q+1)(kq-2q-1)-u^2(k+1)(kq+1)].$$

La première inégalité entraîne la seconde si l'on a

$$q(k+q)[k-1-u^2(k+1)] > (k+2q+1)(kq-2q-1)-u^2(k+1)(kq+1).$$

En faisant tout passer dans le premier membre, puis divisant par $q+1$ et tenant compte de (85), on obtient

$$(88) \qquad p(3q+1)+(1-q)(1+pu^2) > 0.$$

Quand cette dernière inégalité n'est pas vérifiée, c'est (87) qui entraîne (86).

40. *Cas de l'échappement isochrone.* — On a $s=0$. La courbe de marche est alors une *cubique unicursale* (Γ), admettant l'origine pour *centre de symétrie* et dont l'équation cartésienne est (1)

$$(89) \qquad X[(X-x)^2+p^2] = p(X-x).$$

Elle *ne dépend plus que du paramètre p*. La condition (86) devient

$$(k+1)u^2+1-k > 0;$$

on vérifie aisément qu'elle équivaut à $\frac{dx}{du} < 0$; on doit *exclure l'arc compris entre les points à tangente verticale*, lesquels n'existent d'ailleurs que si $p < 1$. La condition (87) devient

$$(90) \qquad u^2(k+1)(kq+1)+(2q+1+k)(2q+1-kq) > 0.$$

Elle est beaucoup plus compliquée, car *elle fait intervenir les paramètres* α, β, c'est-à-dire *les frottements du balancier*.

41. *Ordre de grandeur des coefficients p, α, β, s.* — Le coefficient p dépend du frottement visqueux du support comparé au coefficient de couplage. Sa valeur numérique peut varier dans d'assez larges limites, suivant la manière dont l'expérience est réalisée. Il en est de même de α, qui fait intervenir le frottement visqueux du balancier.

Le coefficient β ne dépend que du balancier. Par exemple, dans le cas d'une montre, voici les valeurs qui résultent des mesures faites par M. Langue à

(1) Nous supprimons les accents de X', x'.

l'occasion de sa Thèse. Pour une montre de 39^{mm}, en position verticale, on trouve $\beta = \frac{1,2}{A}$. Pour une montre de $23^{mm},5$, en position verticale également, on a $\beta = \frac{2,24}{A}$ Si l'on suppose par exemple $A = \pi$, on trouve $\beta = 0,38$ et $0,71$. En position horizontale, β est de cinq à dix fois plus petit. Pour un pendule à suspension à lame, β est sensiblement nul. On peut donc admettre que β *ne dépasse jamais l'unité* (1).

Enfin, le coefficient s peut s'écrire $s = \frac{R\sqrt{p}}{43200\lambda}$, en appelant R le retard diurne dû à l'échappement. Pour une montre, ce retard ne dépasse guère une dizaine de secondes. Si l'on se borne à considérer des valeurs de $p \leq 4$ par exemple, on a donc $s \leq \frac{1}{21600\lambda}$. Cette limite dépend évidemment de λ, c'est-à-dire du couplage. On peut par exemple n'envisager que des *valeurs de s ne dépassant pas l'unité*. Mais, bien entendu, cette limitation est quelque peu arbitraire.

42. *Formes diverses des courbes de marche.* — Les figures 1 à 15 de l'annexe reproduisent les courbes de marche pour $\alpha = 0,1$; 1 et 2; $\beta = 0$ et 1; $p = 4,1$ et $0,25$. Les valeurs de s sont indiquées sur chaque courbe. Pour les valeurs intermédiaires ou extérieures, il suffit d'interpoler ou extrapoler linéairement, parallèlement aux droites reproduites en trait fin. Pour $p = 1$ et $0,25$, chaque courbe a été arrêtée à l'arc instable; les régions instables sont couvertes de hachures. En général, c'est la condition (86) qui limite cette région. Cependant, pour $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $p = 1$; pour $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $p = 0,25$ et pour $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $p = 0,25$, les deux conditions interviennent; c'est particulièrement visible dans le premier cas.

L'examen des différentes courbes montre que, pour $s = 0$, il y a *un seul régime périodique* si $p \geq 1$ et ce *régime* est *toujours stable*. Si $p < 1$, il y a *trois régimes périodiques*, dont *un ou deux stables*. Pour $s > 0$, on peut avoir deux régimes stables pour $p = 1$ et pour des valeurs de p légèrement supérieures. On voit aussi que, si $s > 0$, *pour des valeurs opposées de x, le retard est supérieur à l'avance*, à condition d'évaluer x comme il a été précisé au n° 33. Mais si l'on évalue x sans tenir compte du retard dû à l'échappement, comme on l'a expliqué dans la remarque du n° 38, on constate que *la conclusion peut être inversée* pour les valeurs de x éloignées de zéro.

Remarques. — I. Lorsqu'il existe *deux régimes stables*, celui qui finit par s'établir *dépend des conditions initiales*. Il s'établit d'autant plus lentement que

(1) On pourrait évidemment obtenir des valeurs plus grandes, en augmentant artificiellement le frottement constant; mais, cela ne présenterait sans doute pas un bien grand intérêt pratique.

le point correspondant de la courbe de marche est plus près du point limitant l'arc stable sur lequel il se trouve.

Dans le cas $p<1$ et $s=0$ par exemple, on peut avoir deux points très voisins d'un point à tangente verticale. L'un M est stable, l'autre M′ est instable; il y a en outre un deuxième point stable M″, éloigné des deux points précédents. Suivant les conditions initiales, le régime limite correspond à M ou à M″, le premier étant atteint très lentement. Il peut arriver que le régime *se rapproche lentement du régime instable* correspondant à M′, *puis s'en éloigne* pour tendre finalement vers l'un des deux régimes stables. *Si l'on n'attend pas assez longtemps pour mesurer la période*, on peut obtenir une période voisine de celle qui correspond à M′; on obtient ainsi une *fausse période stable*.

II. Les formules (84) *supposent que l'amplitude* A *reste constante*. Or, si l'on observe la marche du balancier pendant 24 heures par exemple et *si l'échappement n'est pas à force constante*, A diminue progressivement au cours de ces 24 heures. Dès lors, la valeur de X_0, dans le deuxième terme de la formule (81), augmente. Si l'on calcule toujours le retard par rapport à la marche autonome normale (c'est-à-dire support calé et ressort de barillet remonté à fond), les retards du balancier et du support au bout de 24 heures *sont supérieurs à ceux qui résultent des formules* (84). Leur calcul peut être fait par une intégration, suivant la méthode exposée par M. Langue dans sa Thèse.

43. *Amplitudes du balancier et du support.* — Le rapport de l'amplitude du balancier (support mobile) à l'amplitude autonome A est le nombre φ. Le rapport de l'amplitude du support à l'amplitude A est, d'après (67), $\varpi=\varphi\sqrt{k}$. Les figures 16 à 18 reproduisent les courbes représentant les variations de φ et ϖ en fonction de x [1], pour $s=0$. Pour toute autre valeur de s, il suffit de rappeler le point correspondant de la courbe de marche sur la courbe $s=0$, parallèlement aux lignes indiquées au numéro précédent; on prend ensuite les valeurs de φ et ϖ correspondant au point ainsi obtenu.

Sur chaque figure, les courbes (φ) sont celles qui montent de gauche à droite, tandis que les courbes (ϖ) descendent.

44. *Cas où les périodes propres du support et du balancier sont éloignées.* — Dans ce cas, m_0 et m_1 sont différents. *En première approximation* (n° 29), *le support est immobile* et le balancier oscille normalement; *l'effet du couplage est nul*. Nous savons (n^{os} 11 et 26) qu'il est *inutile de passer à la deuxième approximation*.

---

[1] Pour $p=4$ et 1, on a seulement considéré les valeurs positives de x; pour $p=0{,}25$, on s'est borné aux valeurs de x correspondant à l'un des arcs stables. Si l'on change x en $-x$, φ et ϖ ne changent pas.

CHAPITRE IV.

LA MONTRE OSCILLANTE.

45. *Énoncé du problème.* — Le problème de la montre oscillante a été étudié pour la première fois par MM. Jacquerod et Mügeli (*Journal suisse d'Horlogerie*, 1926), par une méthode purement expérimentale. Il a été repris plus récemment par M. Mesnage (*Journal de Physique*, 1944 et 1946), qui a comparé les résultats numériques déduits de ses expériences à ceux d'une théorie due à MM. Mercier et Loudette, mais dans laquelle n'interviennent qu'une partie des données concrètes du système. Nous allons le reprendre, *avec les données véritables*, au moyen de la théorie générale exposée au chapitre précédent.

Le problème, tel qu'il a été étudié expérimentalement par les auteurs précités, se pose de la manière suivante.

Une montre est posée sur un plateau, lequel est *suspendu à un fil de torsion* (Jacquerod et Mügeli) *ou à un bifilaire* (Mesnage). Il s'agit d'étudier les variations de la marche de la montre et de l'amplitude des oscillations du balancier et du plateau, quand on fait varier la fréquence propre du plateau.

On peut aussi réaliser l'expérience en *accrochant la montre à un clou*: on observe très bien ses oscillations. La question intéressante est de savoir quelle est la répercussion de ces oscillations sur la marche de la montre (1).

46. *Variables canoniques.* — Appelons θ_0 l'élongation du support et θ celle du balancier par rapport à la montre. Soient M le moment d'inertie du balancier par rapport à son axe et I le moment d'inertie de tout le système par rapport à l'axe de rotation du support. La force vive est

$$2\,T = I\theta_0'^2 + M\theta'^2 + 2\,M\theta_0'\theta'.$$

Posons

$$\theta = q_1, \qquad \theta_0 = \lambda q_0, \qquad \frac{M}{I} = \lambda^2; \tag{91}$$

il vient

$$2\,T = M\,(q_0'^2 + q_1'^2 + 2\,\lambda q_0' q_1'). \tag{92}$$

Cette expression est de la forme (38), avec $n = 1$, $c_1 = 1$.

Soient ω_1 et ω_0 les *pulsations propres* de la montre (balancier calé) et du balancier (montre calée), quand on néglige les forces perturbatrices, en parti-

(1) D'après les renseignements qui m'ont été communiqués, il y a une vingtaine d'années par M. Jacquerod, c'est cette question qui a provoqué les recherches des physiciens suisses. Elle avait été soulevée par certaines épreuves de réception ayant conduit à des résultats différents, suivant la manière dont avait été observée la marche au pendu.

culier les défauts d'isochronisme introduits par le spiral et par le couple de torsion. Les forces principales sont données par la formule (6).

47. *Forces perturbatrices.* — Nous avons d'abord les couples correctifs qu'il y aurait lieu d'ajouter au couple dû au spiral et au couple de torsion. Le premier est très petit, si le spiral est muni de courbes terminales vérifiant les conditions de Phillips; nous le négligerons. Le second est également très petit dans le cas de la suspension par fil simple ou double. Dans le cas de la montre accrochée à un clou, il est proportionnel à θ_0^2; comme θ_0 est pratiquement très petit, nous le négligerons aussi.

Les *résistances passives* ne sont connues qu'imparfaitement. Nous admettrons que *le support est seulement soumis à des résistances visqueuses* et nous appellerons δ_0 son *décrément logarithmique*. Le couple correspondant vaut $-\frac{\delta_0}{\pi} I\omega_0\theta'_0$. Son travail virtuel est

$$-\frac{\delta_0}{\pi} I\omega_0\theta'_0\,\delta\theta_0 = -M\frac{\delta_0}{\pi}\omega_0 q'_0\,\delta q_0.$$

En comparant avec (7), on a

$$Q_0 = -\frac{\delta_0}{\pi\lambda}\omega_0 q'_0 = -\omega_0 a_0 q'_0, \tag{93}$$

en posant, conformément à la notation du n° 17,

$$a_0 = \frac{\delta_0}{\pi\lambda}. \tag{94}$$

Les résistances passives s'exerçant *sur le balancier* ont été étudiées expérimentalement par divers auteurs, entre autres M. Arcay et M. Langue, dans leurs Thèses. On peut admettre, avec une bonne approximation, qu'elles se réduisent à *un frottement visqueux* et à *un frottement constant*. Nous adopterons, à leur égard et aussi pour l'échappement, les notations des n^{os} 16 à 18. Nous retombons ainsi sur les hypothèses et notations du n° 35.

Pour que notre théorie soit applicable, il faut que tous les Q_i restent finis, donc *que tous les couples perturbateurs*, comparés aux couples principaux, *soient au plus de l'ordre de* $\lambda = \sqrt{\frac{M}{I}}$.

48. *Courbe de marche.* — Avec les notations du n° 38, nous avons, en appelant δ_0 et δ_1 les *décréments logarithmiques* du support et du balancier

$$\alpha = \frac{\pi^2\lambda^2}{\delta_0\delta_1}, \qquad \beta = \frac{2\lambda f}{\delta_1 A}, \qquad p = \frac{\delta_0^2}{\pi^2\lambda^2}. \tag{95}$$

Quant au facteur s, il vaut, d'après (83) et (78), $s = \frac{a_0 ED}{2\pi A^3}$. Si l'on appelle Γ le

couple exercé par l'échappement sur le balancier, on a, d'autre part (n° 16), $\lambda M\omega_1^2 E = 2\Gamma i$; d'où

$$s = \frac{\Gamma D i \delta_0}{\lambda^2 \pi^2 M \omega_1^2 A^3}. \tag{96}$$

Rappelons que i et D sont les *angles d'impulsion et de dégagement* du balancier et que A est l'amplitude normale du balancier, les trois angles étant évalués en radians.

Avec les notations de M. Mesnage, que nous surlignons, pour éviter toute confusion avec nos propres notations, on a

$$\lambda = \overline{k}, \qquad a_0 = \frac{\overline{\eta}}{\overline{k}}, \qquad X = a_0 \frac{1-\overline{y}}{\lambda \overline{y}}, \qquad X - x = a_0 \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\lambda y}. \tag{97}$$

Si l'on néglige l'angle de dégagement, la courbe de marche est représentée par l'équation (89), qui devient, d'après les formules ci-dessus,

$$(\overline{y}-1)[(\overline{y}-\overline{x})^2 + \overline{\eta}^2\overline{y}^2] = \overline{k}^2\overline{y}^2(\overline{y}-\overline{x}). \tag{98}$$

Cette équation ne diffère de l'équation (1) de M. Mesnage que par le terme $\overline{\eta}^2\overline{y}^2$ du crochet, que M. Mesnage remplace par $\overline{\eta}^2\overline{y}$. Comme, dans la pratique, $\overline{y}$ est très voisin de *un*, cette différence a peu d'importance.

L'équation ci-dessus est valable pour un *chronomètre de marine*, qui est muni d'un échappement à détente, donc sans angle de dégagement. Cela explique les résultats obtenus par M. Mesnage dans son deuxième travail. Mais, avec une montre ordinaire, il n'en est pas de même. Prenons par exemple l'*une des montres expérimentées* par M. Langue dans sa Thèse et dont il a déterminé toutes les caractéristiques. Pour cette montre, de 39^{mm} de diamètre, on a en unités C. G. S.

$$D = 13^\circ,5 = 0^r,236; \qquad i = 23^\circ,5 = 0^r,41; \qquad \delta_1 = 0,0104;$$

$$\Gamma = 67 \quad \text{pour} \quad A = \frac{3\pi}{2} = 4,71; \qquad \omega_1 = 5\pi; \qquad I = 0,175.$$

Quant au frottement constant, il dépend de la position de la montre et de la forme du pivot de balancier. Par exemple, en position horizontale et pour un pivot plat, on a $\lambda f = 0,003$; si le pivot est pointu, $\lambda f = 0,0006$. Adoptons la valeur moyenne $\lambda f = 0,002$.

Comme support, prenons celui qui a servi à M. Mesnage. On a approximativement (1) $I = 14300$, $\delta_0 = 0,008$.

(1) La valeur du décrément est une valeur moyenne, car M. Mesnage a constaté que δ_0 variait entre 0,004 et 0,009, suivant l'amplitude des oscillations. Cette variation prouve que le couple amortisseur ne se réduit pas en réalité à un couple visqueux. L'hypothèse faite au n° 47 n'est donc pas justifiée et il y aurait lieu de reprendre nos calculs avec le couple véritable.

De ces données, on déduit

$$\lambda^2 = \frac{0,175}{14300} = 1,225.10^{-5}; \qquad \lambda = 3,5.10^{-3}; \qquad \alpha = \frac{1,225.10^{-5}\pi^2}{0,008.0,0104} = 1,45$$

ou approximativement 1,5; $\beta = \frac{0,004}{0,0104.4,71} = 0,0826$ ou approximativement 0,1; $p = \frac{64}{(3,5\pi)^2} = 0,53$ ou approximativement 0,5;

$$s = \frac{67.0,236.0,41.0,008.10^{-5}}{1,225\pi^2.25\pi^2.(4,71)^3.0,175} = 0,095 \qquad \text{ou} \quad 0,1 \text{ environ.}$$

Adoptons $\alpha = 1,5$; $\beta = 0,1$; $p = 0,5$; $s = 0,1$. La figure 19 représente la courbe de marche en trait plein. L'arc instable AB a été tracé en pointillé. Les points limites A et B sont sensiblement les points à tangente verticale. On a tracé en trait mixte la courbe théorique correspondant à un échappement isochrone.

L'origine O correspond aux formules (77); c'est-à-dire que *le retard du support sur la montre est évalué en tenant compte du retard dû à l'échappement.* Avec l'origine O', ce dernier retard est négligé, comme le fait M. Mesnage. Si l'on trace l'arc symétrique de l'arc inférieur par rapport à O', on obtient une courbe légèrement au-dessus de l'arc supérieur, à gauche du point d'abscisse $-0,6$ et au-dessous, à droite de ce point. Autrement dit, l'*avance l'emporte sur le retard quand on est loin de la résonance;* on a la *conclusion inverse au voisinage de la résonance.* Ceci est bien d'accord avec ce qu'a obtenu M. Mesnage (cf. *fig.* 2 de son premier mémoire).

Signalons aussi que le retard a été évalué sur 24 heures. Dans la première série d'expériences, effectuée sur une montre ordinaire et non sur un chronomètre de marine, l'échappement n'est pas à force constante; il y aurait donc lieu de tenir compte de la remarque II du n° 42. Les retards expérimentaux doivent être plus grands que les retards théoriques.

Il serait intéressant de reprendre systématiquement ces expériences, en déterminant toutes les caractéristiques de la montre et du support et tenant compte de la décroissance de la force de l'échappement, afin de voir si les résultats expérimentaux sont numériquement d'accord avec les résultats théoriques.

49. *Cas où les fréquences propres sont éloignées.* — Comme on l'a vu au n° 44, notre méthode ne s'applique pas à ce cas. Nous savons seulement qu'en première approximation, l'effet du couplage est nul; mais, nous ne savons pas évaluer la seconde approximation.

CHAPITRE V.

LES PENDULES SYMPATHIQUES.

50. *Données.* — Considérons n pendules (P_i), dont les axes (O_i) sont fixés à un même support (S), lequel peut prendre un *mouvement de translation* suivant une direction horizontale Ox perpendiculaire à tous les axes (O_i). Nous appelons M la *masse totale* du support et des pendules; x l'abscisse de (S) rapportée à l'origine fixe O. Nous appelons M_i la masse de (P_i), supposée *très petite* vis-à-vis de M; G_i son centre de gravité; R_i son rayon de giration autour de (O_i): L_i la longueur de son pendule synchrone; θ_i son élongation, c'est-à-dire l'angle que fait la verticale descendante $O_i z_i$ avec la droite $O_i G_i$, le sens positif de rotation étant le sens de $O_i z_i$ vers l'axe Ox. Nous posons $\omega_i^2 = \frac{g}{L_i}$, ω_i désignant donc la *pulsation propre* de (P_i).

Le support est soumis aux forces suivantes :

1° *Force de rappel.* — $M\omega_0^2 x$, ω_0 désignant la *pulsation propre du support* (pendules calés).

2° *Résistance visqueuse.* — $\lambda M \omega_0 a_0 x'$.

Le pendule (P_i) est soumis à son *poids* $M_i g$ et aux forces perturbatrices suivantes :

1° *Couple résistant.* — $\lambda M_i \omega_i R_i^2 a_i \theta_i'$.

2° *Échappement* isochrone à force constante, dont le couple a pour valeur absolue $\lambda M_i R_i^2 \omega_i^2 \Gamma_i$.

Rappelons que chaque a_i est le quotient du décrément logarithmique par $\lambda\pi$.

51. *Variables canoniques.* — Posons

$$\frac{R_i}{L_i}\sqrt{\frac{M_i}{M}} = \lambda c_i, \qquad x = \lambda q_0, \qquad c_i L_i \theta_i = q_i, \qquad c_i > 0. \tag{99}$$

On a

$$2T = M\left(\sum_{i=0}^{n} q_i'^2 + 2\lambda \sum_{i=0}^{n} c_i q_0' q_i'\right),$$

$$2U = -M\left(\sum_{i=0}^{n} \omega_i^2 q_i^2\right).$$

On retombe sur les formules (38) et (6). Toutes les conclusions obtenues au Chapitre III sont donc applicables au cas actuel.

52. *Cas de deux pendules identiques.* — L'étude du cas général est compliquée. Nous la ferons seulement en supposant qu'on a *deux pendules identiques* (¹) et que *les trois pulsations propres sont voisines.*

Nous pouvons prendre $c_1 = c_2 = c$ et poser les formules (43), avec $m_i = 1$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Nous sommes dans le cas du n° 32, avec $a_1 = a_2 = a$, $E_1 = E_2 = E$. De plus, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Posons

$$(100)\qquad \frac{E}{\pi} = \Lambda, \qquad y_1^2 = \Lambda u_1, \qquad y_2^2 = \Lambda u_2, \qquad u_1 + u_2 = v, \qquad u_1 u_2 = w, \qquad k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

La première équation (57) nous donne

$$(101)\qquad y_0^2 = k\Lambda v.$$

Les deux équations (56) et la deuxième équation (57) s'écrivent alors

$$(102)\qquad \begin{cases} \varepsilon^2 u_1^2 + (1 - a u_1)^2 = k c^2 v u_1, \\ \varepsilon^2 u_2^2 + (1 - a u_2)^2 = k c^2 v u_2, \\ v(a + k a_0) = 2. \end{cases}$$

Par soustraction des deux premières, on obtient, en écartant le cas $u_1 = u_2$,

$$(103)\qquad v(\varepsilon^2 + a^2 - k c^2) = 2a.$$

En éliminant v entre (103) et la troisième équation (102), il vient

$$(104)\qquad \varepsilon\varepsilon_0 = c^2 + a a_0$$

ou, en prenant $\alpha_0 = 0$, de sorte que $\varepsilon = \alpha - z$ et $\varepsilon_0 = -z$,

$$(105)\qquad z^2 - \alpha z - c^2 - a a_0 = 0.$$

Cette équation admet deux racines de signe contraire.

En additionnant les deux premières équations (102), on a, en tenant compte de (103),

$$(106)\qquad w(\varepsilon^2 + a^2) = 1.$$

Ayant une racine de (105), on en déduit ε et k; d'où v et w; d'où u_1 et u_2, donc y_1 et y_2.

53. Reste à examiner le *cas particulier* $u_1 = u_2 = u = \frac{1}{a + k a_0}$. En portant dans la première équation (102), on obtient

$$\varepsilon(\varepsilon\varepsilon_0^2 - 2c^2\varepsilon_0 + a_0^2\varepsilon) = 0.$$

(¹) Le cas $n = 1$ est identique au problème de la montre oscillante.

On a d'abord la solution $\varepsilon = 0$; d'où $u = \frac{1}{a}$ et $y_0 = 0$, en supposant $\alpha_0 \neq \alpha$. Les équations (44) se réduisent à des identités; les équations (45) donnent $x_1 - x_2 = \pi$. Le support est immobile; les deux pendules oscillent symétriquement avec leur fréquence propre.

Mais, nous savons (n° 26) que, dans ce cas, notre théorie n'est plus justifiée.

On a ensuite l'équation

$$\varepsilon\varepsilon_0^2 - 2c^2\varepsilon_0 + a_0^2\varepsilon = 0, \tag{107}$$

qui est du *troisième degré* en z. Ayant une de ses racines, on en déduit ε, ε_0 et k; d'où u et y_0.

Dans le *cas particulier où la fréquence du support est exactement égale à celle des pendules*, on a

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \qquad k = 1, \qquad u = \frac{1}{a + a_0}, \qquad y_0^2 = 2Au,$$
$$y_0 = y_1\sqrt{2} = y_2\sqrt{2}, \qquad \varepsilon^2 = 2c^2 - a_0^2.$$

Les formules (44) donnent ensuite, pour $i = 1$ et 2,

$$\cos(x_i - x_0) = \frac{\varepsilon}{c\sqrt{2}}, \qquad \sin(x_i - x_0) = \frac{a_0}{c\sqrt{2}}.$$

Les deux pendules oscillent parallèlement.

Dans le cas particulier où $a_0 = c\sqrt{2}$, on a $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0$, $x_1 - x_0 = x_2 - x_0 = \frac{\pi}{2}$. Les deux pendules sont en quadrature avec le support.

54. *Stabilité.* — Examinons d'abord le cas du n° 52. On a

$$H_i = 0, \qquad K_i = \varepsilon_i y_i, \qquad J_0 = a_0 y_0, \qquad y_1 J_1 = A(au_1 - 1), \qquad y_2 J_2 = A(au_2 - 1).$$

L'équation (54), où nous multiplions les deuxième et cinquième lignes et la cinquième colonne par y_1, les troisième et sixième lignes et la sixième colonne par y_2, devient

$$\begin{vmatrix} kv & au_1 - 1 & au_2 - 1 & -\varepsilon v & \varepsilon u_1 & \varepsilon u_2 \\ u_1 & (\rho + a)u_1 - 1 & 0 & \varepsilon u_1 & -\varepsilon u_1 & 0 \\ u_2 & 0 & (\rho + a)u_2 - 1 & \varepsilon u_2 & 0 & -\varepsilon u_2 \\ 0 & -\varepsilon u_1 & -\varepsilon u_2 & kv(\rho + a_0) & au_1 - 1 & au_2 - 1 \\ 0 & \varepsilon u_1 & 0 & 1 - au_1 & (\rho + a)u_1 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon u_2 & 1 - au_2 & 0 & (\rho + a)u_2 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut développer ce déterminant et l'ordonner par rapport à ρ. Mais, il est inutile de calculer tous les coefficients. En effet, le coefficient de ρ^5 est visiblement $k^2c^2a^2$. Le terme constant se calcule aisément en faisant $\rho = 0$; on trouve $-4\varepsilon^2(k+1)c(u_1 - u_2)^2$. Or, d'après (104), ε et ε_0 sont de même signe:

donc $k > 0$. On en conclut que l'*équation de stabilité admet au moins une racine réelle et positive*; donc, *tout régime synchronisé est instable*.

55. Examinons maintenant le cas du n° 53. En changeant ρ en $\frac{2}{u}$ et développant le déterminant ci-dessus (¹), on constate que l'équation de stabilité se décompose en

$$\rho^2 + 2\rho au + (a^2 + \varepsilon^2)u^2 - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad c_0\rho^3 + c_1\rho^2 + c_2\rho + c_3 = 0,$$

avec

$$c_0 = k^2, \qquad c_1 = 2k(k au + 1 - au) = 2k^2 u(a - a_0),$$
$$c_2 = k(2 - k)(1 - a^2u^2) - (1 - au)^2 - \varepsilon^2 u^2(k + 1)^2,$$
$$c_3 = 2(1 - k)(1 - au)^2 + 2\varepsilon^2 u^2(k + 1).$$

Les conditions de stabilité se réduisent à

$$(a^2 - \varepsilon^2)u^2 > 1, \qquad c_3 > 0, \qquad c_1c_2 - c_0c_3 > 0.$$

On vérifie immédiatement que la première entraîne la seconde et, moins facilement, qu'elle entraîne aussi la troisième. *Il ne reste* donc *qu'une condition*, qui s'écrit, en tenant compte de (107),

$$\varepsilon(a^2\varepsilon_0 - \varepsilon a_0^2 - \varepsilon_0 a a_0) > 0. \tag{108}$$

56. *Courbe de marche.* — Comme au n° 38, appelons $43200\lambda x$ le *retard diurne du support* (*balanciers calés*) *sur les pendules* (*support calé*) et $43200\lambda X$ le *retard diurne des pendules* (*support libre*) *sur les pendules* (*support calé*). On a $\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\lambda}{2}\alpha$; donc, $x = \alpha$; de même, $\frac{\omega_1 - \omega}{\omega} = \frac{\lambda}{2}\varepsilon$; donc $X = \varepsilon$.

Portant dans (107) et tenant compte de $\varepsilon_0 = \varepsilon - \alpha = X - x$, on obtient l'*équation de la courbe de marche*

$$X(X - x)^2 - 2c^2(X - x) + a_0^2 X = 0.$$

Posons

$$X = \frac{2c^2}{a_0}X', \qquad x = \frac{2c^2}{a_0}x', \qquad \frac{a_0^2}{2c^2} = p; \tag{109}$$

après suppression des accents, nous retombons sur l'équation (89). *La courbe de marche est la même qu'au* n° 40.

La *condition de stabilité* (108) s'écrit maintenant, en posant $\frac{a}{a_0} = q$,

$$\frac{x}{X}(2pq - 1) > 2p(q + 1) - 1. \tag{110}$$

Connaissant p et q, il est facile de séparer l'arc stable sur chaque courbe de marche.

(¹) On peut aussi écrire les équations (17) et éliminer η_0, η_1, η_2, $\xi_1 - \xi_0$, $\xi_2 - \xi_0$.

CHAPITRE VI.

LE COUPLAGE EN CHAINE (¹).

57. *Définition du couplage.* — Considérons n pendules (P_i), dont chacun reçoit une impulsion électromagnétique pendant que le pendule précédent (P_{i-1}) a une élongation θ_{i-1} positive (²). Bien entendu, pour $i=1$, on doit remplacer (P_0) par (P_n); de sorte que les pendules forment une chaine.

Nous supposons que le couple s'exerçant sur (P_i) est *constant pendant toute l'impulsion* (³). Nous l'appellerons $\lambda M_i \omega_i^2 \Gamma_i$, M_i désignant le moment d'inertie de (P_i) et ω_i sa pulsation propre; Γ_i peut être positif ou négatif.

Supposons que les résistances passives s'exerçant sur (P_i) se réduisent à un couple de frottement visqueux, que nous appellerons $-\lambda M_i a_i \omega_i \theta_i'$, de sorte que le décrément logarithmique est $\lambda \pi a_i$. On a

$$\theta_i'' + \omega_i^2 \theta_i = \lambda(\omega_i^2 \Gamma_i - a_i \omega_i \theta_i'),$$

en convenant de remplacer Γ_i par zéro, lorsque $\theta_{i-1} < 0$. Les variables canoniques sont donc les élongations et l'on a

$$q_i = \theta_i, \qquad Q_i = \omega_i^2 \Gamma_i - a_i \omega_i q_i'.$$

Nous supposons que *les fréquences des n pendules sont voisines* (⁴). Nous prenons donc $m_i = N = 1$.

58. *Fonctions* X_i, Y_i. — A l'intérieur d'une période convenablement choisie, Γ_i n'existe que pour $-\frac{\pi}{2} < \varphi_{i-1} < \frac{\pi}{2}$. Les formules (14) donnent immédiatement

$$(111) \quad \begin{cases} 2X_i = \varepsilon_i y_i - \frac{2}{\pi}\Gamma_i \cos(x_i - x_{i-1}), \\ 2Y_i = -a_i y_i - \frac{2}{\pi}\Gamma_i \sin(x_i - x_{i-1}). \end{cases}$$

59. *Régimes synchronisés.* — En annulant X_i, Y_i et posant $u_i = x_i - x_{i-1}$, on a

$$(112) \qquad \cos u_i = \frac{\pi \varepsilon_i y_i}{2\Gamma_i}, \qquad \sin u_i = -\frac{\pi a_i y_i}{2\Gamma_i}, \qquad \operatorname{tg} u_i = -\frac{a_i}{\varepsilon_i}.$$

(¹) Signalé par M. Bouasse (*Pendule, spiral, diapason*, t. II, p. 310) pour deux diapasons.

(²) On pourrait, plus généralement, remplacer cette condition par $\theta_{i-1} > \beta_{i-1}$, β_{i-1} étant un angle donné, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Les calculs seraient plus compliqués, mais abordables.

(³) On pourrait, plus généralement, supposer qu'il est une fonction déterminée θ_i et θ_i'.

(⁴) On pourrait aussi supposer qu'elles sont proportionnelles à des entiers m_i.

Les u_i ayant une somme nulle, on en déduit l'équation

$$S_1 - S_3 + S_5 - \ldots = 0. \tag{113}$$

en appelant S_p la somme des produits p à p des $\frac{a_i}{-\varepsilon_i}$. Si l'on pose toujours (49) et (50), donc (52), on voit que cette équation est de degré $n-1$ par rapport à z; *il y a donc* $n-1$ *points de synchronisation. L'amplitude* y_i vaut

$$y_i = \frac{2|\Gamma_i|}{\pi\sqrt{\varepsilon_i^2 + a_i^2}}; \tag{115}$$

la *différence de phase* vaut $u_i = \operatorname{arc\,tg}\frac{a_i}{-\varepsilon_i}$, la détermination étant choisie pour que $\Gamma_i \sin u_i < 0$.

60. *Stabilité.* — On a le système

$$r\xi_i = \varepsilon_i\eta_i - a_i(\xi_i - \xi_{i-1}), \qquad r\eta_i = -a_i\eta_i - \varepsilon_i(\xi_i - \xi_{i-1}).$$

Éliminons η_i; nous obtenons

$$\xi_i(r^2 + 2ra_i + a_i^2 + \varepsilon_i^2) = \xi_{i-1}(ra_i + a_i^2 + \varepsilon_i^2).$$

Multiplions membre à membre toutes les équations analogues; nous obtenons *l'équation caractéristique*

$$\prod_{i=1}^{n}(r^2 + 2ra_i + a_i^2 + \varepsilon_i^2) = \prod_{i=1}^{n}(ra_i + a_i^2 + \varepsilon_i^2). \tag{115}$$

Elle admet visiblement la racine $r = 0$; après suppression de cette racine, il reste une équation de degré $2n-1$, qui est *l'équation de stabilité.*

Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers simples.

61. *Cas où les n pendules sont identiques.* — Les a_i sont égaux, ainsi que les ε_i; donc aussi les u_i, à $k\pi$ près. On en déduit $nu_i = N\pi$, N désignant un entier quelconque. En prenant tous les α_i nuls, on a la formule

$$z = a\cot\frac{N\pi}{n}, \tag{116}$$

où a désigne la valeur commune des a_i. Cette formule nous donne $n-1$ valeurs de z, obtenues pour $N = 1, 2, \ldots, n-1$. On a ensuite

$$y_i = \frac{2|\Gamma_i|}{\pi a}\sin\frac{N\pi}{n}. \tag{117}$$

L'équation (115) se décompose en n équations du second degré

$$\frac{r^2 + 2ra + a^2 + \varepsilon^2}{ra + a^2 + \varepsilon^2} = e^{\frac{2jk\pi}{n}}, \qquad j = \sqrt{-1}; \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

L'équation ci-dessus s'écrit, en posant $\frac{k\pi}{n}=\alpha$, $\frac{N\pi}{n}=\beta$, donc $\varepsilon=-a\cot\beta$,

$$r^2+ra(2-e^{2j\alpha})+\frac{a^2}{\sin^2\beta}(1-e^{2j\alpha})=0. \tag{118}$$

Pour $k=0$, donc $\alpha=0$, on a la racine étrangère $r=0$ et la racine négative $r=-a$. Pour les autres valeurs de k, on a

$$2\frac{r}{a}=e^{2j\alpha}-2\pm\sqrt{\Delta},$$

avec

$$\Delta=(e^{2j\alpha}-2)^2+\frac{4}{\sin^2\beta}(e^{2j\alpha}-1)=1+8\sin^4\alpha-8\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}+2j\sin 2\alpha\left(\frac{2}{\sin^2\beta}-1-2\sin^2\alpha\right).$$

Posons $\sqrt{\Delta}=x+jy$, $x^2=X$; on a

$$f(X)\equiv X^2-X\left(1+8\sin^4\alpha-\frac{8\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\right)-\sin^2 2\alpha\left(\frac{2}{\sin^2\beta}-1-2\sin^2\alpha\right)^2=0,$$

dont il faut prendre la racine positive.

On a ensuite

$$\frac{2r}{a}=e^{2j\alpha}-2\pm(x+jy).$$

La partie réelle de $\frac{2r}{a}$ est $-1-2\sin^2\alpha\pm x$. Pour qu'elle soit <0, il faut et il suffit que l'on ait $X<(1+2\sin^2\alpha)^2$, donc $f[1+2\sin^2\alpha)^2]>0$; soit, en posant $\sin^2\alpha=u$,

$$(1+2u)^4-(1+2u)^2\left(1+8u^2-\frac{8u}{\sin^2\beta}\right)-4a(1-u)\left(\frac{2}{\sin^2\beta}-1-2u\right)^2>0$$

ou, en divisant par $\frac{8u}{\sin^4\beta}$,

$$3\sin^2\beta(1+2\sin^2\alpha)-2\cos^2\alpha>0.$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour les $n-1$ valeurs de α. Il faut et il suffit qu'elle le soit pour celle qui rend le premier membre minimum, c'est-à-dire pour $\alpha=\frac{\pi}{n}$. *La condition de stabilité s'écrit finalement*

$$3\sin^2\frac{N\pi}{n}\left(1+2\sin^2\frac{\pi}{n}\right)-2\cos^2\frac{\pi}{n}>0. \tag{119}$$

Le premier membre est minimum pour $N=1$. Donc, pour que tous les points de synchronisation soient stables, il faut et il suffit que l'on ait, en posant $\sin^2\frac{\pi}{n}=\rho$,

$$6\rho^2+5\rho-2>0, \qquad \text{soit } \rho>0,295 \text{ environ} \qquad \text{ou} \quad \sin\frac{\pi}{n}>0,543.$$

La plus grande valeur de n vérifiant cette inégalité est 5. Donc, *s'il y a au plus cinq pendules identiques, tous les points de synchronisation sont stables.*

Si $n > 5$, les points correspondant à $N = 1$ et $N = n - 1$ sont instables. Pour $N = 2$, l'inégalité (119) s'écrit

$$12v^2 + 6v - 1 > 0, \qquad \text{soit } v > 0,132; \qquad \sin\frac{\pi}{n} > 0,363.$$

La plus grande valeur de n satisfaisant à cette condition est 8. Donc, *s'il y a six, sept ou huit pendules, tous les points sont stables, sauf les deux qui correspondent à la fréquence la plus éloignée de la fréquence moyenne.*

On pourrait continuer pour $N = 2, 3$, etc. Contentons-nous de chercher s'il existe toujours au moins un point stable.

Si n est pair, le premier membre de (119) est maximum pour $N = \frac{n}{2}$ et vaut alors $8v + 1$; il est > 0. Si n est impair, le maximum est obtenu pour $N = \frac{n-1}{2}$. Il vaut $\frac{3}{2}(1+w)(3-2w^2) - 2w^2$, en posant $w = \cos\frac{\pi}{n}$. On vérifie facilement qu'il est positif pour $0 < w < 1$. Donc, *la synchronisation sur la fréquence la plus voisine de la fréquence moyenne est toujours stable.*

62. *Cas où il y a deux pendules.* — L'équation (113) se réduit à $S_1 = 0$; d'où l'on tire

$$z = \frac{\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1}{a_1 + a_2},$$

puis

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 a_2 + \omega_2^2 a_1}{a_1 + a_2}. \tag{120}$$

Puis, d'après (112),

$$\operatorname{tang}(x_1 - x_2) = \frac{a_1 + a_2}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Le pendule qui a la plus petite fréquence est en avance de phase sur l'autre pendule. Cette avance croit avec l'amortissement et quand la différence des fréquences diminue. *Les mouvements sont en quadrature quand les périodes propres sont égales.*

De (114), on déduit

$$y_1 = \frac{2(a_1 + a_2)\,|\,\Gamma_1\,|}{\pi a_1 \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (a_1 + a_2)^2}}. \tag{121}$$

Cette formule et la formule analogue donnent les *amplitudes des deux pendules en régime synchronisé.* Elles sont *proportionnelles aux couples et aux inverses des décréments correspondants.*

63. Étudions la *stabilité*. L'équation (115) s'écrit, en divisant par r,

$$r^3 + 2r^2(a_1 + a_2) + r(\delta_1 + \delta_2 + 3a_1 a_2) + a_1\delta_2 + a_2\delta_1 = 0, \qquad \delta_i = a_i^2 + \varepsilon_i^2.$$

Les conditions de stabilité se réduisent à

$$\delta_2(2a_1+a_2)+\delta_1(2a_2+a_1)+6a_1a_2(a_1+a_2)>0,$$

laquelle est vérifiée. Donc, *le régime synchronisé est toujours stable.*

Remarque. — Dans le *cas particulier où les deux pendules sont identiques*, on a $\varepsilon_i=0$, $\delta_i=a^2$; l'équation caractéristique admet la racine double $-a$ et la racine simple $-2a$. L'un des décréments de la synchronisation est égal à celui de l'amortissement de chaque pendule; l'autre est double. Ceci donne une indication sur la rapidité avec laquelle s'établit le régime synchronisé quand on part de conditions initiales quelconques. Cette rapidité est du même ordre que celle de l'amortissement des oscillations libres. Si les conditions initiales sont très éloignées de celles qui correspondent au régime synchronisé, *la durée du régime transitoire peut donc être très longue, d'autant plus longue que l'amortissement des oscillations libres est plus lent.*

64. *Cas où il y a trois pendules.* — L'équation (113) devient, en supposant $\Sigma\alpha_i=0$,

$$(122)\quad z^2(a_1+a_2+a_3)+z(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3)+(a_1\alpha_2\alpha_3+a_2\alpha_3\alpha_1+a_3\alpha_1\alpha_2-a_1a_2a_3)=0.$$

En écrivant la condition de réalité des racines, remplaçant α_3 par $-(\alpha_1+\alpha_2)$ et posant $a_1+a_2+a_3=a$, on obtient

$$\alpha_1^2[(a_1-a_3)^2+4aa_2]+2\alpha_1\alpha_2[(a_3-a_1)(a_3-a_2)+2a(a-2a_3)]+\alpha_2^2[(a_2-a_3)^2+4aa_1]+4aa_1a_2a_3>0.$$

Le trinome constitué par les termes en α_1, α_2 a pour discriminant $-36aa_1a_2a_3<0$. Donc, ce trinome est identiquement positif: l'inégalité est toujours vérifiée. Donc, *les deux points de synchronisation existent toujours.*

L'équation de *stabilité* (115) s'écrit, après suppression de la racine nulle,

$$r^5+c_1r^4+c_2r^3+c_3r^2+c_4r+c_5=0$$

avec

$$c_1=2s_1,\qquad c_2=\sigma_1+4s_2,\qquad c_3=2\Sigma[\delta_1(a_2+a_3)]+7s_3,$$
$$c_4=\sigma_2+3(\Sigma a_1a_2\delta_3),\qquad c_5=\Sigma a_1\delta_2\delta_3$$

et

$$s_1=a_1+a_2+a_3,\qquad s_2=a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2,\qquad s_3=a_1a_2a_3,$$
$$\sigma_1=\delta_1+\delta_2+\delta_3,\qquad \sigma_2=\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1+\delta_1\delta_2;$$

les sommes Σ indiquant qu'on doit permuter circulairement les indices et additionner.

Tous ces coefficients sont positifs. *L'unique condition de stabilité* s'écrit

$$(123)\qquad (c_3-c_1c_2)(c_2c_4-c_3c_5)-(c_4-c_1c_5)^2>0$$

Elle permet, avec des données numériques, de reconnaitre si l'une ou l'autre des racines de l'équation (122) correspond à un régime stable. Mais, une discussion générale semble inabordable. Nous nous contenterons de la faire dans le *cas où les trois pendules ont le même amortissement.*

65. Les a_i ont la même valeur, que nous appellerons a. L'équation (122) devient

$$3z^2 = a^2 + \beta, \qquad \Sigma\alpha_i^2 = 2\beta. \tag{124}$$

L'hypothèse $\Sigma\alpha_i = 0$ entraîne $\Sigma\alpha_2\alpha_3 = -\beta$, $\Sigma\alpha_2^2\alpha_3^2 = \beta^2$. Les α_i^2 sont racines de l'équation $\gamma^2 = X(X-\beta)^2$, en posant $\gamma = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Ces racines ne sont toutes trois réelles que si $\gamma^2 < \frac{4}{27}\beta^3$.

Si l'on pose $r + a = \rho$, l'équation (115) s'écrit

$$(\rho^2 + \varepsilon_1^2)(\rho^2 + \varepsilon_2^2)(\rho^2 + \varepsilon_3^2) = (\rho a + \varepsilon_1^2)(\rho a + \varepsilon_2^2)(\rho a + \varepsilon_3^2).$$

Elle admet visiblement la racine $\rho = 0$, à laquelle correspond $r = -a < 0$. Les autres racines sont données par l'équation du quatrième degré

$$r^4 + c_1 r^3 + c_2 r^2 + c_3 r + c_4 = 0,$$

avec

$$c_1 = 5a, \qquad c_2 = 11a^2 + 3\beta, \qquad c_3 = 3a(4a^2 + 3\beta),$$
$$3c_4 = 16a^4 + 20a^2\beta + 4\beta^2 + 18\gamma z.$$

Les *conditions de stabilité* sont

$$c_4 > 0, \qquad c_4 c_1^2 < c_3(c_1 c_2 - c_3),$$

soit

$$\gamma z > -\frac{2}{9}(a^2 + \beta)(4a^2 + \beta) = -\mathrm{F}(a), \tag{125}$$

$$\gamma z < \frac{1148a^4 + 877a^2\beta + 62\beta^2}{450} = \mathrm{G}(a). \tag{126}$$

Appelons z' la racine qui a le signe de γ et z'' l'autre racine. La première vérifie toujours (125); la deuxième vérifie toujours (126).

Pour que z'' convienne, il faut et il suffit que l'on ait

$$\gamma^2 < \frac{3\mathrm{F}^2(a)}{a^2 + \beta} = \frac{4}{27}(a^2 + \beta)(4a^2 + \beta)^2. \tag{127}$$

Le second membre étant $> \frac{4}{27}\beta^3$, cette inégalité est toujours vérifiée. Donc, *la racine z'' est toujours stable.*

Pour que z' convienne, il faut et il suffit que l'on ait

$$\gamma^2 < \frac{3\mathrm{G}^2(a)}{a^2 + \beta} = \mathrm{H}(a). \tag{128}$$

On vérifie facilement que la fonction $H(a)$ est croissante. Son minimum $H(0)=\frac{6a^2}{67500}(0,2385)^2\beta^3<\frac{4}{27}\beta^3$. Dès lors, *si* $\gamma<0,2385\,\beta\sqrt{\beta}$, *les deux racines sont stables; si* $\gamma>0,2385\,\beta\sqrt{\beta}$, *elles ne sont toutes deux stables que si a dépasse la racine de l'équation* $\gamma^2=H(a)$.

66. *Cas de deux pendules dont le rapport des fréquences est voisin d'un nombre entier.* — Supposons $m_1=1$, $m_2=m>1$. Le couple Γ_1 existe pour

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<m\varphi+x_2<\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

soit

$$-\frac{\pi}{2m}-\frac{x_2}{m}+\frac{2k\pi}{m}<\varphi<\frac{\pi}{2m}-\frac{x_2}{m}+\frac{2k\pi}{m};\qquad (k=0,1,\ldots,m-1).$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi}\Gamma_1\cos\varphi_1\,d\varphi=\sum_{k=1}^{m-1}\Gamma_1\left[\sin\left(\frac{\pi}{2m}-\frac{x_2}{m}+x_1+2k\frac{\pi}{m}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2m}-\frac{x_2}{m}+x_1+2k\frac{\pi}{m}\right)\right]$$
$$=2\Gamma_1\sin\frac{\pi}{2m}\sum_{k=0}^{m-1}\cos\left(x_1-\frac{x_2}{m}+2k\frac{\pi}{m}\right)=0.$$

De même, $\int_0^{2\pi}\Gamma_1\sin\varphi_1\,d\varphi=0$. Donc, $X_1=\pi\varepsilon_1 y_1$, $Y_1=-\pi a_1 y_1$. En annulant Y_1, on obtient $y_1=0$; donc, *la synchronisation est impossible*. Ceci s'explique par le fait que le pendule (P_1) reçoit, au cours d'une période, m impulsions dont l'effet total est nul.

CHAPITRE VII.

ENTRETIEN D'UN PENDULE PAR LE SECTEUR (1).

67. *Variables canoniques.* — Le pendule porte, à son extrémité, un noyau de fer doux, s'engageant dans une bobine alimentée par le secteur et dont le circuit comprend un condensateur. Appelons θ l'élongation du pendule, évaluée en radians; $L(\theta)$ l'inductance de la bobine, C la capacité du condensateur, ρ la résistance du circuit, $U\sin\omega t$ la tension, i l'intensité du courant, $q=\int i\,dt$; ω_1 la pulsation propre du pendule, πa_1 son décrément logarithmique, I son moment d'inertie. Nous avons les équations différentielles

$$q''L(\theta)+q'\theta'L'(\theta)+\rho q'+\frac{q}{C}=U\sin\omega t,\qquad \theta''+a_1\omega_1\theta'+\omega_1^2\theta=\frac{L'(\theta)}{2I}q'^2.$$

(1) *Voir* à ce sujet une communication de M. Béthenod (*C. R. Acad. Sc.*, t. 207, 1938, p. 847).

Supposons le circuit en résonance pour $\theta = \theta_1$, de sorte que

$$\omega^2 CL(\theta_1) = 1. \tag{129}$$

Si le pendule est maintenu dans la position d'élongation θ_1, l'intensité du courant est $\frac{U}{\rho}\sin\omega t$ et l'on a $q = -\frac{U}{\rho\omega}\cos\omega t$. Nous poserons, dans le cas général, $q = \frac{U}{\rho\omega} q_2$, de sorte que q_2 sera un *nombre sans dimensions*. Nous poserons ensuite $\theta = q_1$; q_1 et q_2 seront les *variables canoniques*.

Nos équations deviennent

$$q_1'' + \omega_1^2 q_1 = Q_1, \qquad q_2'' + \omega^2 q_2 = Q_2, \tag{130}$$

avec [1]

$$\begin{cases} Q_1 = KL'(q_1) q_2'^2 - \alpha_1 \omega_1 q_1', \qquad K = \dfrac{U^2}{2\rho^2\omega^2 I}, \\ Q_2 = \dfrac{\rho\omega}{L(q_1)}\sin\omega t - \dfrac{L'(q_1)}{L(q_1)} q_1' q_2' - \dfrac{\rho}{L(q_1)} q_2' + q_2\omega^2 \dfrac{L(\theta) - L(\theta_1)}{L(\theta)}. \end{cases} \tag{131}$$

68. Observons maintenant que les impulsions reçues par le pendule ont une fréquence double de celle du courant. Dès lors, appelons N un *nombre* entier voisin de $\frac{2\omega}{\omega_1}$, donc pratiquement très grand. Posons

$$\omega_1 = \frac{2\omega}{N}\sqrt{1+\varepsilon_1}. \tag{132}$$

La première équation (130) devient

$$q_1'' + \frac{4\omega^2}{N^2} q_1 = Q_1 - 4\varepsilon_1 \frac{\omega^2}{N^2} q_1.$$

Faisons maintenant le changement de variables

$$\begin{cases} \dfrac{2\omega t}{N} = \varphi \qquad q_1 = y_1\cos\varphi_1, \qquad \dfrac{dq_i}{d\varphi} = -y_1\sin\varphi_1, \qquad \varphi_1 = \varphi + x_1, \\ q_2 = y_2\cos\varphi_2, \qquad \dfrac{dq_2}{d\varphi} = -\dfrac{N}{2} y_2\sin\varphi_2, \qquad \varphi_2 = \dfrac{N}{2}\varphi + x_2 = \omega t + x_2. \end{cases} \tag{133}$$

En répétant le calcul du n° 3, on obtient les équations (11), avec

$$f_1 = \varepsilon_1 q_1 - \frac{N^2}{4\omega^2} Q_1, \qquad f_2 = -\frac{F}{2\omega^2} Q_2. \tag{134}$$

On vérifie facilement que les fonctions $f_i\cos\varphi_i$ et $f_i\sin\varphi_i$ admettent la période 2π par rapport à φ.

---

[1] Nous supprimons le facteur λ. Mais il demeure bien entendu que notre théorie n'est applicable que si les Q_i sont assez petits.

69. *Fonctions* X_i, Y_i. — On a, par les formules (14),

$$2X_1 = \varepsilon_1 y_1 - \frac{N^2}{4\pi} k y_2^2 \int_0^{2\pi} L'(q_1) \sin^2\varphi_2 \cos\varphi_1 d\varphi_1,$$

$$2Y_1 = -a_1 y_1 - \frac{N^2}{4\pi} k y_2^2 \int_0^{2\pi} L'(q_1) \sin^2\varphi_2 \sin\varphi_1 d\varphi_1,$$

$$2\pi X_2 = -\frac{N\rho}{2\omega} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L(q_1)} \sin\frac{N\varphi}{2} \cos\varphi_2 d\varphi_1 - \frac{N y_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{L(q_1) - L(\theta_1)}{L(q_1)} \cos^2\varphi_2 d\varphi_1$$
$$- \frac{N\rho}{2\omega} y_2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi_2 \cos\varphi_2}{L(q_1)} d\varphi_1 + y_1 y_2 \int_0^{2\pi} \frac{L'(q_1)}{L(q_1)} \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2 d\varphi_1,$$

$$2\pi Y_2 = -\frac{N\rho}{2\omega} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L(q_1)} \sin\frac{N\varphi}{2} \sin\varphi_2 d\varphi_1 - \frac{N y_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{L(q_1) - L(\theta)}{L(q_1)} \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 d\varphi_1$$
$$- \frac{N\rho}{2\omega} y_2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi_2}{L(q_1)} d\varphi_1 + y_1 y_2 \int_0^{2\pi} \frac{L'(q_1)}{L(q_1)} \sin\varphi_1 \sin^2\varphi_2 d\varphi_1.$$

On peut écrire $2\varphi_2 = N\varphi_1 + \xi$, en posant

(135) $$\xi = 2x_2 - N x_1.$$

Dès lors, posons

(136) $$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} L'(q_1) \cos n\varphi_1 d\varphi_1, \qquad B_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\varphi_1}{L(q_1)} d\varphi_1, \\ \qquad\qquad C_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{L'(q_1)}{L(q_1)} \cos n\varphi_1 d\varphi_1. \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que l'on a

(137) $$\left\{ \begin{array}{l} 2X_1 = \varepsilon_1 y_1 + \dfrac{N^2}{16\pi} k y_2^2 [(A_{N+1} + A_{N-1}) \cos\xi - 2A_1], \\ 2Y_1 = -a_1 y_1 + \dfrac{N^2}{16\pi} k y_2^2 (A_{N+1} - A_{N-1}) \sin\xi, \\ 2\pi X_2 = \dfrac{N\rho}{4\omega} [B_0 \sin x_2 + B_N \sin(x_2 - \xi)] + \dfrac{N}{4} y_2 [(B_N \cos\xi + B_0) L(\theta_1) - 2\pi] \\ \qquad - \dfrac{N\rho}{4\omega} y_2 B_N \sin\xi + \dfrac{y_1 y_2}{4} (C_{N-1} - C_{N+1}) \cos\xi, \\ 2\pi Y_2 = \dfrac{N\rho}{4\omega} [-B_0 \cos x_2 + B_N \cos(x_2 - \xi)] + \dfrac{N}{4} y_2 L(\theta_1) B_N \sin\xi \\ \qquad + \dfrac{N\rho}{4\omega} y_2 (B_N \cos\xi - B_0) + \dfrac{y_1 y_2}{4} (C_{N-1} - C_{N+1}) \sin\xi. \end{array} \right.$$

70. Il n'est évidemment pas possible de calculer les intégrales A_n, B_n, C_n si l'on ne connaît pas la fonction $L(\theta)$. Signalons cependant quelques propriétés évidentes.

Au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, A_n est le coefficient de $\cos n\varphi$, dans le développement de $L'(y_1 \cos\varphi_1)$ en série de Fourier. On en conclut que si $L(\theta)$ est un polynome

de degré $\leq n$, A_n est nul. Donc, *si* $L(\theta)$ *est un polynome de degré* $< N$, Y_1 se réduit à $-\pi a_1 y_1$ et l'équation $Y_1 = 0$ donne $y_1 = 0$; donc, *la synchronisation est impossible* (1). C'est ce qui arrive par exemple si l'on suppose, comme l'a fait M. Béthenod (2), que $L(\theta)$ est linéaire.

Si la fonction $L(\theta)$ *est paire* et si n est pair, A_n est nul; donc, *si* N *est impair, la synchronisation est encore impossible.* Cela tient à ce que *les impulsions pendant l'oscillation de retour neutralisent celles de l'aller.*

71. *Cas où la fonction* $L(\theta)$ *est analytique.* — On a visiblement

$$A_n = \int_0^{2\pi} L'(q_1) e^{jn\varphi_1} d\varphi_1.$$

Dès lors, posons $e^{j\varphi_1} = z$; nous obtenons

$$A_n = -j \int_{(C)} L'\left(y_1 \frac{z^2+1}{2z}\right) z^{n-1} dz, \tag{138}$$

l'intégrale étant prise le long du cercle (C) de centre O et de rayon *un*. Cette intégrale peut se calculer par la méthode des résidus. On peut faire un calcul analogue pour B_n et C_n.

Si le pendule est très éloigné de la bobine, $L(\theta)$ a une valeur constante, finie et non nulle; $L'(0)$ est nul; on en conclut qu'aucune des fonctions analytiques L', $\frac{1}{L}$ et $\frac{L'}{L}$ ne peut devenir infinie avec θ, donc ne peut admettre $z = 0$ pour pôle. Les seuls pôles intérieurs à (C) correspondent aux pôles ou zéros en 0. Soit R le maximum des modules de ces pôles. Supposons que R ne soit pas très voisin de *un* et prenons R′ entre R et *un*. Au lieu d'intégrer le long de (C), on peut intégrer le long du cercle (C′) de rayon R′. Si l'on appelle M une limite supérieure du module de L' sur (C′), l'intégrale A_n a un module $< 2\pi M R'^n$. Comme $R' < 1$, cette intégrale tend rapidement vers zéro, quand n augmente indéfiniment. Comme le nombre N est pratiquement très grand (50 si le pendule bat la seconde, 100 s'il bat la demi-seconde), on peut affirmer que les intégrales A_{N+1}, A_{N-1} sont très petites vis-à-vis de A_1. Dès lors, dans la première formule (137), on peut réduire le crochet à $-2A_1$. En annulant X_1 et Y_1, puis éliminant y_2, on obtient l'équation

$$\sin\xi = \frac{2a_1}{\varepsilon_1} \frac{A_1}{A_{N+1} - A_{N-1}}. \tag{139}$$

(1) On s'en rend compte d'une manière plus concrète en remarquant que le deuxième terme de Y_1 est, à un facteur constant près, l'énergie fournie au balancier à chaque période. Cette énergie est nulle, si l'on suppose la synchronisation réalisée. On ne peut toutefois pas en conclure que l'entretien du mouvement est impossible; il l'est seulement en régime synchronisé.

(2) Même conclusion si l'on suppose, avec M. Béthenod, que le courant est la superposition de deux courants sinusoïdaux de pulsations ω et $\omega - \omega_1$, à moins d'admettre que le rapport $\frac{2\omega}{\omega_1}$ n'est pas entier, auquel cas la période du mouvement devient plus grande ou bien n'existe plus.

La valeur absolue du second membre est très grande (¹) et dépasse l'unité; cette équation ne peut donc pas être vérifiée. Nous devons donc supposer que l'un au moins des pôles de $L'(\theta)$, considéré comme fonction de z, a un module très largement inférieur à *un*. Or, soit $a = \alpha + i\beta$ un pôle de $L'(\theta)$ par rapport à 0. Les pôles correspondants, par rapport à z, sont les racines de l'équation

$$y(z^2+1) - 2az = 0.$$

Ces racines sont inverses. Pour que l'une d'elles ait un module légèrement inférieur à *un*, il faut et il suffit que leur demi-somme $\frac{a}{y}$ ait une partie imaginaire très petite. Donc, $\frac{\beta}{y}$ doit être petit et, d'autre part, $\frac{\alpha}{y}$ est < 1; de sorte que θ passe nécessairement par la valeur α au cours de l'oscillation. A ce moment, la distance de θ au pôle a est β. Si y n'est pas très grand, β est très petit et $L'(\theta)$ devient extrêmement grand. Comme ceci ne semble pas être réalisé physiquement, on voit qu'il faut que y soit très grand par rapport à la partie imaginaire du pôle de $L'(\theta)$ le plus rapproché de l'axe réel.

On en conclut que *la synchronisation* (²) *n'est réalisable qu'avec une grande amplitude*. Et c'est bien ce qui semble ressortir des expériences de M. Hirschi (³), qui a dû limiter l'amplitude des oscillations par des butées élastiques (⁴).

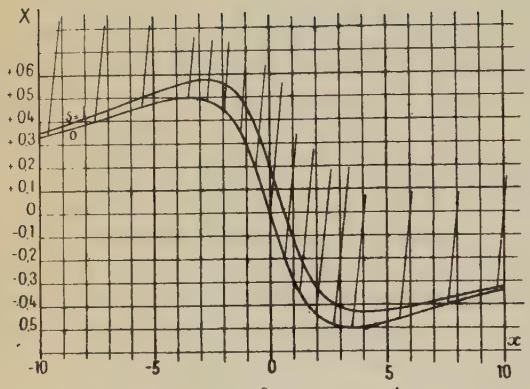
On pourrait essayer de reprendre la théorie en tenant compte de ces butées. Si le couple qu'elles exercent sur le balancier était assez petit pour pouvoir être considéré comme un de nos couples perturbateurs habituels, on calculerait l'accroissement correspondant de Υ_1 par la formule (34). Mais, dans ce cas, la butée serait insuffisante pour limiter les amplitudes. Dès lors, il ne semble pas qu'on puisse aborder le problème par notre méthode. Il faudrait étendre celle-ci au cas où le couple principal change au cours de chaque oscillation, ce qui paraît difficile. Nous ne pousserons donc pas plus loin l'étude de cette question, qui semble extrêmement compliquée.

(¹) A moins que $\frac{a_1}{\varepsilon_1}$ soit extrêmement petit, ce qui nécessiterait un amortissement beaucoup plus faible qu'il ne l'est en réalité.

(²) Nous disons synchronisation et non entretien du mouvement.

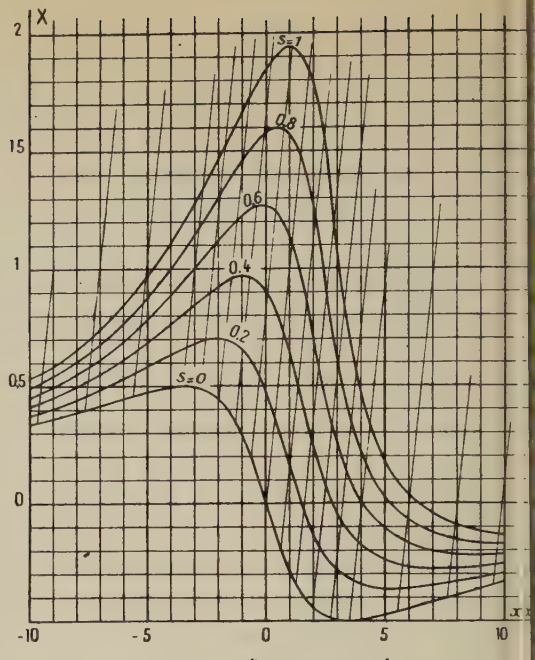
(³) *C. R. Acad. Sc.*, t. 219, 1944, p. 53. Ces expériences ont été reprises ultérieurement par un autre élève de l'Institut de Chronométrie, M. George; les conclusions ont été analogues.

(⁴) Si ces butées n'existent pas, c'est la tige du pendule qui vient buter contre la bobine.



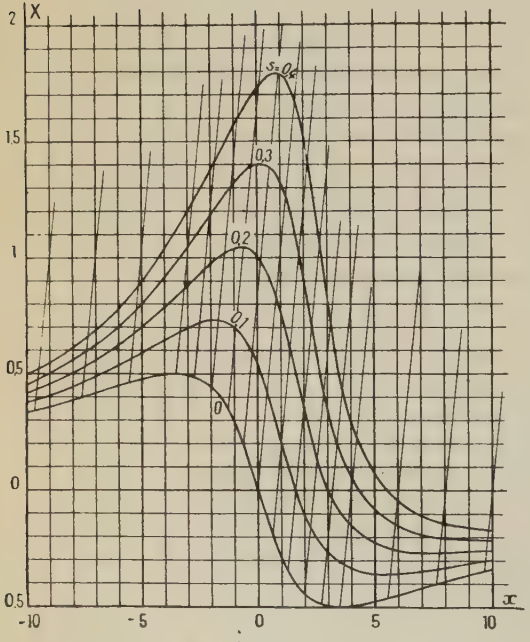
$\alpha = 0{,}1.$ $\beta = 0.$ $p = 4.$

Fig. 1.



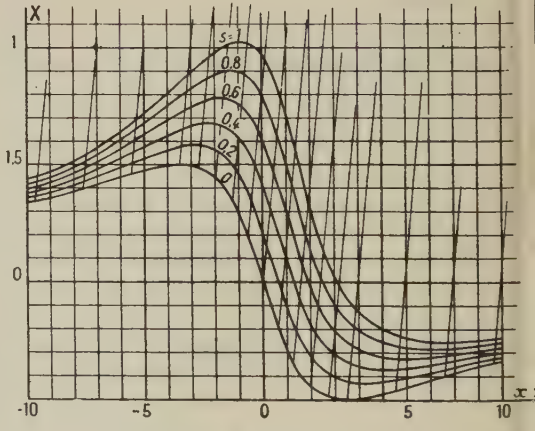
$\alpha = 1.$ $\beta = 0.$ $p = 4.$

Fig. 2.



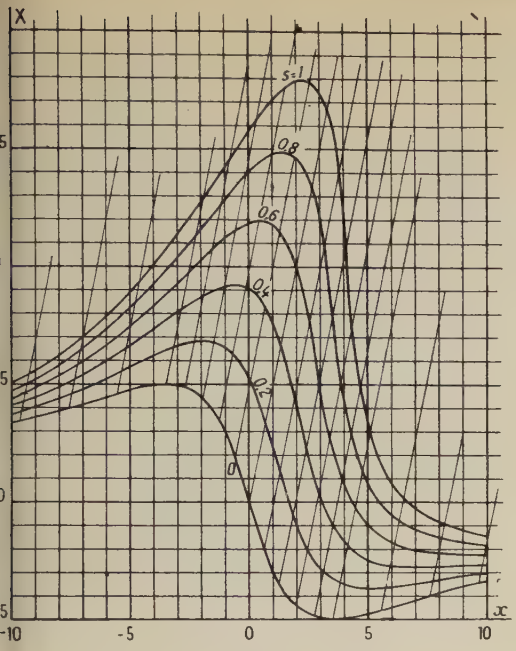
$\alpha = 2.$ $\beta = 0.$ $p = 4.$

Fig. 3.



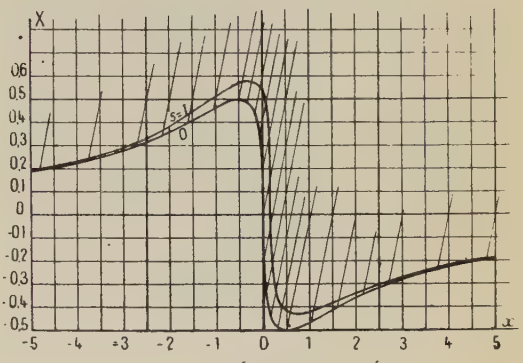
$\alpha = 1.$ $\beta = 1.$ $p = 4.$

Fig. 4



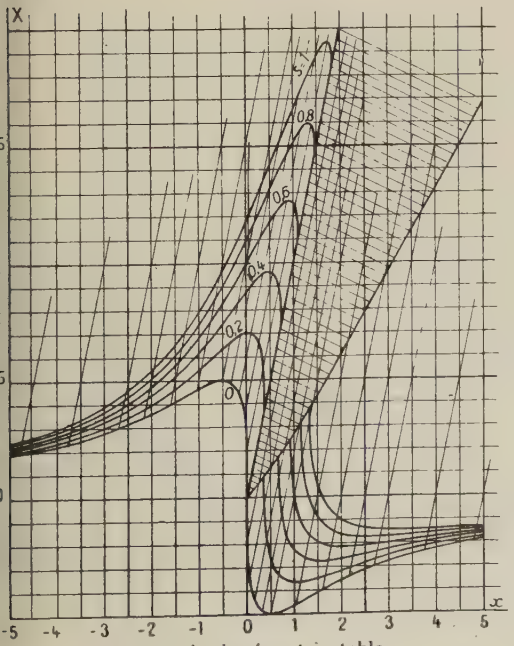
$\alpha = 2.$ $\beta = 1.$ $p = 4.$

Fig. 5.



$\alpha = 0,1.$ $\beta = 0.$ $p = 4.$

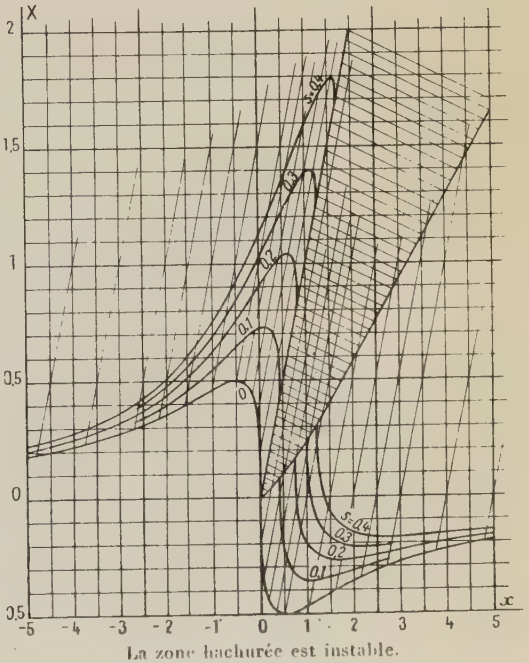
Fig. 6.



La zone hachurée est instable.

$\alpha = 1.$ $\beta = 0.$ $p = 4.$

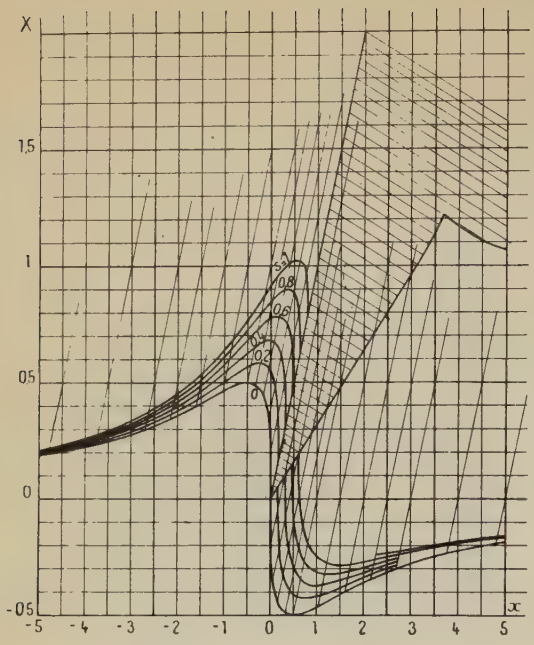
Fig. 7.



La zone hachurée est instable.

$\alpha = 2.$ $\beta = 0.$ $p = 1.$

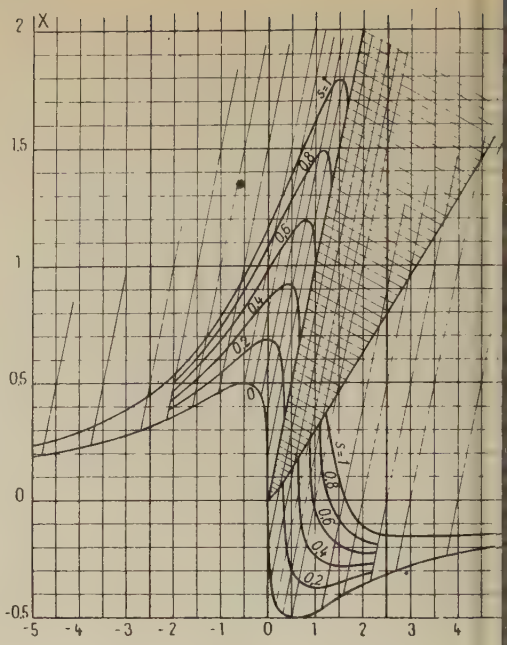
Fig. 8.



La région hachurée est instable.

$\alpha = 1.$ $\beta = 1.$ $p = 1.$

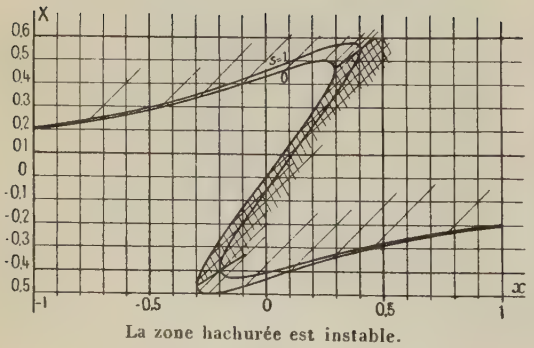
Fig. 9.



La région hachurée est instable.

$\alpha = 2$ $\beta = 1.$ $p = 1.$

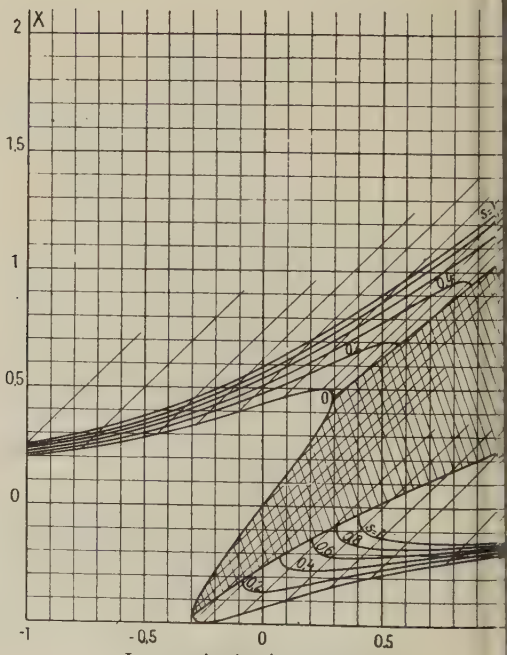
Fig. 10.



La zone hachurée est instable.

$\alpha = 0,1.$ $\beta = 0.$ $p = \frac{1}{4}.$

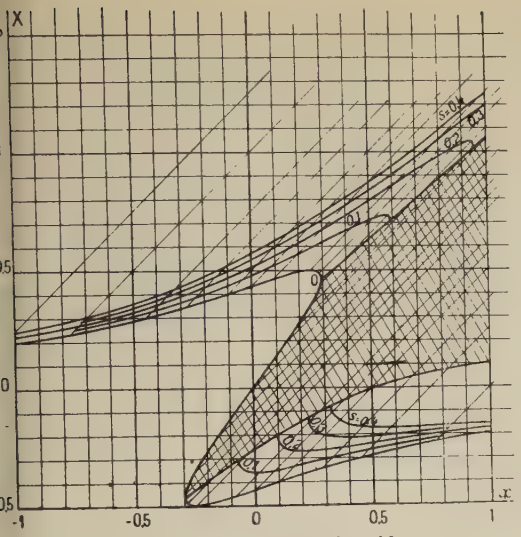
Fig. 11.



La zone hachurée est instable.

$\alpha = 1.$ $\beta = 0.$ $p = \frac{1}{4}$

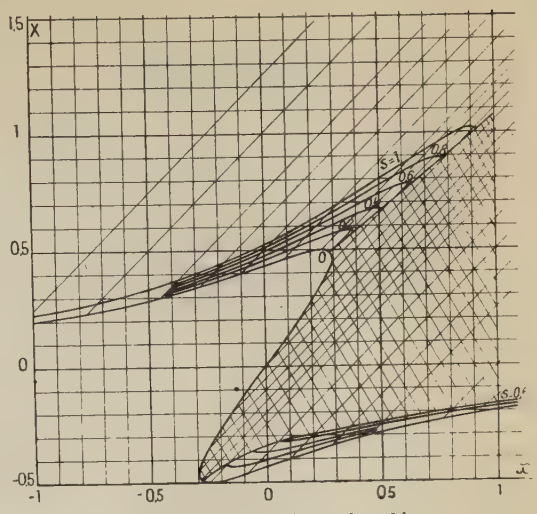
Fig. 12.



La région hachurée est instable.

$\alpha = 2. \quad \beta = 0. \quad p = \frac{1}{4}.$

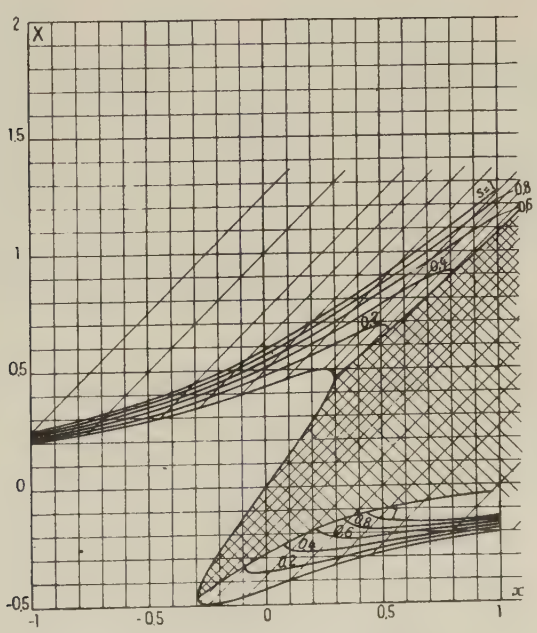
Fig. 13.



La région hachurée est instable.

$\alpha = 1. \quad \beta = 1. \quad p = \frac{1}{4}.$

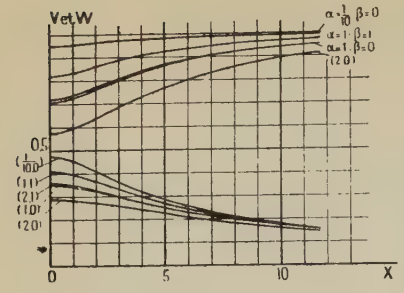
Fig. 14.



La région hachurée est instable.

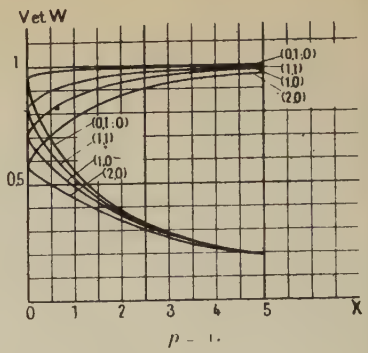
$\alpha = 2. \quad \beta = 1. \quad p = \frac{1}{4}.$

Fig. 15.



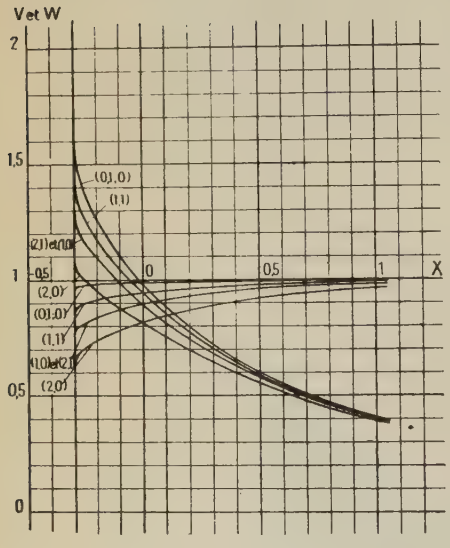
$p = 4$.

Fig. 16.



$p = 1$.

Fig. 17.



Les courbes (2,1) se confondent sensiblement avec les courbes (1,0).

$p = \frac{1}{4}$.

Fig. 18.

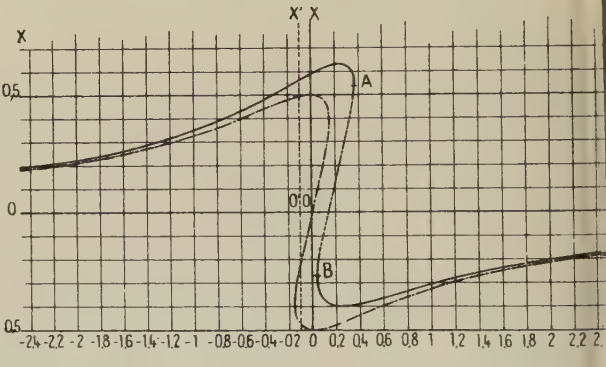


Fig. 19.

ALGÈBRE

DES

RELATIONS DE CONGRUENCE

PAR M. ALBERT CHÂTELET.

1. Dans un exposé récent (¹) j'ai montré comment les théorèmes de Schreier et de Jordan-Holder, sur les suites de composition dans les groupes, sont vrais, d'une façon plus générale, pour des familles de congruences — ou de modes d'égalité — d'un ensemble E. J'avais indiqué qu'il est encore possible de les étendre au cas d'autocorrespondances de E dont chacune n'a le caractère de congruence que dans une certaine partie — ou sous-ensemble — de E. Cette extension qui s'applique notamment aux hypergroupes est l'objet du présent mémoire.

En me plaçant au point de vue de cette extension, je rappelle d'abord sommairement les définitions, notations et vocabulaire; mais seulement pour préciser dans quelles conditions les énoncés ou les formules des propriétés restent valables; je complète éventuellement les démonstrations.

I. — Les autocorrespondances et les congruences.

2. *Domaine d'une autocorrespondance.* — Dans un ensemble E, d'éléments $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ j'appelle *autocorrespondance de mode* — ou d'opérateur — α une relation entre deux variables de E, qui est vraie pour certaines valeurs de ces variables; je la note :

$$x.(\alpha).y : \quad \text{(correspondance entre } x \text{ sujet et } y \text{ image)}.$$

(¹) *Revue Scientifique*, 1947. Les renvois à cet exposé sont indiqués par les numéros des paragraphes, précédés de l'abréviation *R. S.* Les renvois au présent mémoire sont donnés seulement par des numéros.

Je signale à nouveau la très importante étude de P. Dubreil et Mme Dubreil-Jacotin sur l'algèbre des congruences qu'ils appellent *équivalences*.

Je considère éventuellement l'effet — ou la détermination — d'une autocorrespondance α dans une partie A, de E, appelée domaine de α, dans laquelle je conviens de prendre soit les sujets, soit les images, soit les deux; ce qui revient à utiliser l'une des conjonctions

$$\left(x \in A \text{ et } x.(\alpha).y\right); \qquad \left(y \in A \text{ et } x.(\alpha).y\right); \qquad \left(x, y \in A \text{ et } x.(\alpha).y\right)$$

(avec la condition générale sous-entendue $x, y \in E$).

Une autocorrespondance est *vide* — ou impossible — dans un domaine A, si elle n'y a aucun sujet, ni aucune image (les deux premières conditions et, *a fortiori*, la troisième étant impossibles). Elle est *totale* — ou pleine — dans A, si elle est vraie pour tout couple de valeurs (de A).

Je dis qu'une partie A (de E) est *domaine complet* d'une autocorrespondance α, si tout élément de A est sujet et image d'au moins un élément de E(1)

$$x \in A \rightarrow \left(\text{Ex. } x', x'' \in E \text{ et } x.(\alpha).x' \text{ et } x''.(\alpha).x\right)$$

[les ensembles (dans E) de sujets et d'images de chaque élément x de A ne sont pas vides].

Je dis que A est *domaine clos* de α (2) si toute image et tout sujet d'un élément de A est dans A

$$x.(\alpha).y \rightarrow (x \in A \rightleftharpoons y \in A; \text{ tous } x, y).$$

Ces deux qualités sont évidemment indépendantes.

3. *Comparaison des autocorrespondances.* — Je définis l'*implication* de deux autocorrespondances (β conséquente de α, ou α antécédente de β) *dans un domaine* A (partie de E), pour tout sujet, *ou* toute image

$$(x \in A \text{ ou } y \in A) \rightarrow \left(x.(\alpha).y \rightarrow x.(\beta).y\right);$$

(chaque appartenance de la disjonction entraîne l'implication du second membre). Suivant une convention courante, je conviens qu'une autocorrespondance vide implique toute autre. L'implication est manifestement *transitive* pour des comparaisons dans un même domaine.

Si A est *domaine complet de l'antécédente* α, il l'est, *a fortiori*, de la conséquente β (une image *ou* un sujet existant, mode α, existe aussi mode β).

Si B est *domaine clos de la conséquente* β, il l'est, *a fortiori*, de l'antécédente α.

---

(1) « Ex. » abréviation de Existe ou Existent.

(2) Ces définitions déjà données (*R. S.*, 22) pourraient être envisagées d'une façon encore plus restrictive dans une partie E', de E, contenant A, c'est-à-dire complétées par la condition préalable $x, y \in E'$.

L'*égalité* de deux autocorrespondances α et α', *dans un domaine* A, est définie par l'équivalence de leurs effets, ou encore par leur implication mutuelle, pour tout sujet, *ou* pour toute image

$$(x\in A \quad \text{ou} \quad y\in A) \rightarrow \left(x.(\alpha).y \rightleftharpoons x.(\alpha').y\right).$$

Si une relation d'implication ou d'égalité est vraie dans un domaine A, elle l'est, *a fortiori*, dans toute partie A', de A. Une autocorrespondance est *déterminée dans un domaine* A, si elle est définie, à une égalité près dans A; elle est, *a fortiori*, déterminée dans toute partie de A.

Quel que soit le domaine dans lequel elles sont comparées, pour deux (ou pour un système fini de) autocorrespondances, *la plus forte antécédente commune est leur conjonction* (que je note $[\alpha, \beta]$, par abréviation de [α et β]); *leur plus faible conséquente commune est leur disjonction* [que je note (α, β), par abréviation de (α ou β)]

$$\begin{matrix}(\lambda\rightarrow\alpha \quad \text{et} \quad \lambda\rightarrow\beta) & \rightleftharpoons & (\lambda\rightarrow[\alpha,\beta]) \\ \alpha\rightarrow\lambda \quad \text{et} \quad \beta\rightarrow\lambda) & \rightleftharpoons & \left((\alpha,\beta)\rightarrow\lambda\right)\end{matrix} \qquad (\text{dans A}).$$

Dans un domaine A (qui peut être E), la conjonction peut être *vide* (sans que les composantes le soient); elle est *totale* si et seulement si les composantes le sont toutes. La disjonction peut être *totale;* elle est *vide* si et seulement si les composantes le sont toutes.

Les *lois* (logiques), de *comparaison* (des composantes avec le résultat d'une opération), d'*absorption* et de *combinaison terme à terme* s'appliquent (corrélativement) à la conjonction et à la disjonction (dans tout domaine A, où sont déterminées et comparées les autocorrespondances)

$$[\alpha_1, \alpha_2]\rightarrow\alpha_i\rightarrow(\alpha_1, \alpha_2) \qquad (i=1 \text{ ou } 2);$$

$$(\alpha\rightarrow\beta)\begin{cases}\rightarrow & (\alpha=[\alpha,\beta]);\\ \rightarrow & \left(\beta=(\alpha,\beta)\right);\end{cases}$$

$$(\alpha_1\rightarrow\alpha_2 \text{ et } \beta_1\rightarrow\beta_2)\begin{cases}\rightarrow & \left([\alpha_1,\beta_1]\rightarrow[\alpha_2,\beta_2]\right);\\ \rightarrow & \left((\alpha_1,\beta_1)\rightarrow(\alpha_2,\beta_2)\right).\end{cases}$$

4. *Opérations entre les autocorrespondances.* — En plus des deux opérations ainsi définies j'utilise encore les deux suivantes (*R. S.*, 24).

1° *La disjonction* α_1 *d'un ensemble* (fini ou infini) $\mathfrak{A}$ d'autocorrespondances α_i, que je note

$$\alpha_1=(\ldots\alpha_i\ldots); \qquad \text{ou} \qquad \alpha_1=(\mathfrak{A});$$

est définie par la condition générale

$$x.(\alpha_1).y \rightarrow (\text{Ex. } \alpha_i\in\mathfrak{A} \quad \text{et} \quad x.(\alpha_i).y)$$

(Pour un système fini de α_i, cette définition est équivalente à la précédente). Si chaque α_i est déterminé dans un domaine *complet* — ou *clos* — A_i, la disjonction α_i a pour domaine *complet* — ou *clos* — la *réunion* A (finie ou infinie) des A_i.

2° *La multiplication de deux* — ou d'un système fini de — autocorrespondances (désignée par le signe $\times$) est définie par l'élimination d'une variable

$$x.(\alpha\times\beta).y \quad \leftrightarrow \quad \left(\text{Ex. } u: \quad x.(\alpha).u \quad \text{et} \quad u.(\beta).y\right)$$

(il est sous entendu $u \in E$). La condition de possibilité d'un produit peut être aisément précisée; je signale seulement que : si une partie D (de E) est domaine *clos* pour deux congruences α et β, elle l'est aussi pour leurs produits $\alpha\times\beta$, $\beta\times\alpha$ (et pour tout « monome » en α, β) s'ils ne sont pas vides. Si elle est *en outre domaine complet*, elle l'est aussi pour les produits.

La multiplication est évidemment *associative*; elle vérifie aussi des lois de *comparaison*, de *combinaison terme à terme* et de *distributivité* (complète pour la disjonction; partielle pour la conjonction) (*R. S.*, 25); elle n'est pas nécessairement commutative.

a. Une autocorrespondance λ, de domaine clos A, y *implique son produit* par une autocorrespondance α, réflexive dans A

$$\begin{matrix} \text{Si A domaine clos de } \lambda \\ \alpha \text{ réflexive dans A} \end{matrix} \qquad \lambda \begin{cases} \rightarrow \alpha\times\lambda; \\ \rightarrow \lambda\times\alpha; \end{cases} \qquad \text{dans A.}$$

Si le produit est commutatif (dans A), la condition de réflexivité est seule suffisante.

b. Deux implications peuvent être *multipliées terme à terme*, dans un domaine clos D, commun à leurs antécédentes, et, par suite aux produits de ces antécédentes

$$(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \quad \text{et} \quad \beta_1 \rightarrow \beta_2) \quad \rightarrow \quad (\alpha_1\times\beta_1 \rightarrow \alpha_2\times\beta_2);$$

c. La multiplication est *distributive relativement à la disjonction* (finie ou infinie)

$$\lambda\times(\ldots\alpha_i\ldots) = (\ldots\lambda\times\alpha_i\ldots); \qquad (\ldots\alpha_i\ldots)\times\lambda = (\ldots\alpha_i\times\lambda\ldots).$$

L'égalité a lieu dans E et, *a fortiori*, dans toute partie de E.

d. La multiplication est *partiellement distributive relativement à la conjonction* : le produit d'une conjonction par un facteur implique la conjonction des produits

$$[\alpha, \beta]\times\lambda \rightarrow [\alpha\times\lambda, \beta\times\lambda]; \qquad \lambda\times[\alpha, \beta] \rightarrow [\lambda\times\alpha, \lambda\times\beta].$$

L'implication a lieu dans E et, *a fortiori* dans toute partie de E (toujours avec la convention qu'une autocorrespondance vide implique toute autre).

5. *Congruence.* — J'appelle *congruence* α *dans un domaine* (clos) A, ou simplement « $\bar{\alpha}$ *dans* A » (indication d'une autocorrespondance surlignée) une autocorrespondance α qui, dans A, a les qualités d'une égalité et qui admet A comme domaine clos. Cette définition est exprimée par les conditions

$$x.(\bar{\alpha}).y \rightarrow (x\in A \leftrightarrow y\in A);$$

$$x\in A \rightarrow x.(\bar{\alpha}).x;$$

$$(x \text{ ou } y\in A)\begin{cases} \rightarrow \left(x.(\bar{\alpha}).y \leftrightarrow y.(\bar{\alpha}).x\right); \\ \rightarrow \left(\left(x.(\bar{\alpha}).u \text{ et } u.(\bar{\alpha}).y\right) \rightarrow x.(\bar{\alpha}).y\right). \end{cases}$$

En raison de la réflexivité, A et toute partie de A est *domaine complet* de $(\bar{\alpha})$.

La qualité de symétrie permet de ne plus distinguer entre sujet et image : il est commode de dire que x et y sont *congrus*, *mode* $(\bar{\alpha})$ (ou que chacun d'eux est congru à l'autre), ce qui peut être formulé

$$x\equiv y, \ (\text{mode } \alpha); \quad \text{ou} \quad x\equiv y. \ (\alpha).$$

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

$\bar{\alpha}$, congruence dans A_1 et dans A_2, l'est dans leur *intersection* $|A_1, A_2|$ (qui est notamment domaine clos);

α, étant congruence dans un domaine A, a les qualités d'une égalité dans toute partie A′ de A (mais ne l'admet pas nécessairement comme domaine clos). Elle est congruence dans le domaine $A'.(\alpha)$, obtenu en prenant tous les éléments de A qui sont congrus à ceux de A′, mode α

$$y\in A'.(\bar{\alpha}) \leftrightarrow (\text{Ex.}y': \ y'\in A' \text{ et } y\equiv y', \ (\bar{\alpha})).$$

Ce domaine, inclus dans A et peut-être égal à A, est la « plus petite partie » de A, contenant A′, où α est congruence.

En particulier si A′ est réduit à un seul élément e, *choisi* — ou *distingué* — dans A, $\bar{\alpha}$ est *congruence totale* dans le domaine $e.(\bar{\alpha})$, que j'appelle *domaine de totalité* de α et que je désigne par une surligne (avec éventuellement e en indice)

$$y\in \bar{A}(\text{ou } A_e) \leftrightarrow (y\equiv e. \ (\text{mode } \bar{\alpha})).$$

6. *Calcul des congruences.* — La *loi d'absorption* s'applique, dans un domaine A, à un produit dont l'un des termes est une *congruence*, α dans A, et dont l'autre terme (absorbé) est une *autocorrespondance* λ, *de domaine complet* A (antécédente de $\bar{\alpha}$, dans A)

$$(\lambda \rightarrow \bar{\alpha}) \leftrightarrow (\lambda \times \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \times \lambda = \alpha), \quad \text{dans A}$$

La démonstration donnée pour $A = E$ (*R. S.*, 27) reste valable en tenant compte de ce que A étant domaine clos pour α, l'est aussi pour l'antécédente λ (n° 3) et, par suite, pour les produits $\lambda \times \bar{\alpha}$ et $\alpha \times \lambda$.

La multiplication des congruences est tautologique

$$\bar{\alpha} \times \bar{\alpha} = \bar{\alpha}, \qquad \text{dans} \quad A.$$

C'est un cas particulier de la loi précédente, puisque α s'implique elle-même et que A en est domaine complet : c'est aussi une autre expression de la qualité de ransitivité de $\bar{\alpha}$ [combiné avec la loi de comparaison d'un produit d'autocorrespondances $(4 - a)$].

Pour une congruence, $\bar{\alpha}$ dans A, il existe une *loi de distributivité* plus précise que celle qui a été donnée pour une autocorrespondance, $(4 - d)$, mais qui est encore *restreinte*, en ce sens qu'elle ne s'applique qu'au *produit d'une conjonction*, dont un terme est α, par une *autocorrespondance*, de domaine complet A, et *antécédente* de $\bar{\alpha}$, dans A

$$(\lambda \prec \bar{\alpha}) \begin{cases} \multimap [\bar{\alpha}, \beta] \times \lambda = [\alpha, \beta \times \lambda]; & \text{ou} \quad [\bar{\alpha} \times \lambda, \beta \times \lambda], \\ \multimap \lambda \times [\bar{\alpha}, \beta] = [\alpha, \lambda \times \beta]; & \text{ou} \quad [\lambda \times \bar{\alpha}, \lambda \times \beta]. \end{cases}$$

La démonstration déjà donnée (*R. S.*, 27) reste valable. Si $\bar{\alpha}$, β, γ sont de domaine complet A (ou E), il n'en est pas nécessairement de même des deux membres de l'égalité, qui peuvent notamment être vides.

Cette condition est analogue à celle de Dedekind, qui caractérise un *treillis modulaire* (*R. S.*, 13).

7. *Comparaison de congruences.* — L'implication de congruences est définie par l'implication des autocorrespondances, dans E. Je ne comparerai, toutefois, que des congruences dont les domaines (clos) contiennent tous un même élément *e*, choisi — ou distingué — dans E.

Si une congruence α implique (dans E) une congruence $\bar{\beta}$, tout domaine B (clos) de β, et notamment son domaine de totalité B est domaine clos de α, dont il contient par suite le domaine de totalité $\overline{A}$

$$(\bar{\alpha} \multimap \bar{\beta}, \text{ dans E}) \multimap (\overline{A} \subset \overline{B} \subset B \subset E).$$

8. *Conjonction de congruences.* — Si α *dans* A et β *dans* B *sont des congruences* (définies par les autocorrespondances α et β dans E);

la conjonction $\mu = [\alpha, \beta]$ *est congruence dans l'intersection* $M = [A, B]$ (qui en est notamment domaine clos).

Dans M, non vide puisqu'elle contient *e*, l'égalité — ou autocorrespondance identique — est une antécédente de la conjonction $\mu = [\alpha, \beta]$ qui, par suite, admet M pour domaine

complet. Par ailleurs la relation qui définit μ dans M

$$(x, y \in A \quad \text{et} \quad x.(\alpha).y) \quad \text{et} \quad (x, y \in B \quad \text{et} \quad x.(\beta).y),$$

a manifestement les qualités d'une égalité (*R. S.*, 28). En outre en combinant membre à membre les implications qui expriment que A et B sont clos pour α et β j'obtiens

$$(x.(\bar{\alpha}).y \quad \text{et} \quad x.(\bar{\beta}).y) \rightarrow ((x \in A \quad \text{et} \quad x \in B) \rightleftarrows (y \in A \text{ et } y \in B));$$

ce qui exprime que M est alors aussi clos pour $\bar{\mu}$.

Le domaine de totalité de μ (de représentant e) *est l'intersection* $M = [\bar{A}, \bar{B}]$, *des domaines de totalité* $\bar{A}$ de α et $\bar{B}$ de β (pour le même représentant e). La vérification est immédiate.

Un *cas particulier*, utilisé ultérieurement, est celui où l'une des congruences. $\bar{\beta}$ par exemple, est considérée (ou déterminée) dans son domaine de totalité $\bar{B}$; dans ce cas

$$\bar{\mu} = \bar{\alpha}, \qquad \text{dans} \quad [A, \bar{B}].$$

En effet, dans la conjonction

$$x.(\bar{\alpha}).y \quad \text{et} \quad x.(\bar{\beta}).y, \quad \text{dans} \quad [A, \bar{B}];$$

la deuxième congruence étant totale (vérifiée pour tout couple x, y de $\bar{B}$, donc de $[A, \bar{B}]$) peut être supprimée. Il est toutefois à remarquer que $[A, \bar{B}]$ est domaine clos pour la conjonction μ (des autocorrespondances α et β, mais ne l'est pas nécessairement pour la congruence $\bar{\alpha}$; l'égalité vraie dans ce domaine ne l'est plus nécessairement dans E.

Si je compare, dans E, diverses congruences, dont $\bar{\alpha}$ dans A, $\bar{\beta}$ dans B (et éventuellement des autocorrespondances), *la congruence* $\mu = [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$, *dans* $[A, B]$ *est la plus forte antécédente commune de* $\bar{\alpha}$ *dans* A *et* β *dans* B.

C'est en effet la plus forte antécédente commune, dans E, des autocorrespondances α et β : elle le reste pour celles des antécédentes qui sont des congruences, puisqu'elle est elle même une congruence.

La construction de la conjonction des congruences dans l'intersection des domaines et son interprétation comme plus forte antécédente commune s'étendent à une famille quelconque (finie) de congruences (dans E).

9. *Multiplication de congruences permutables.* — Le raisonnement fait pour des congruences dans E (*R. S.*, 28) établit la propriété :

Si deux congruences $\bar{\alpha}$ *et* $\bar{\beta}$ *sont permutables dans un même domaine clos* H, *la valeur commune de leurs produits*

$$\delta = \bar{\alpha} \times \bar{\beta} = \bar{\beta} \times \bar{\alpha} \qquad \text{(dans H)};$$

est une congruence, dans H, et c'est *la plus faible conséquente commune de* $\overline{\alpha}$ *et* $\overline{\beta}$, dans H.

Il est possible et utile d'établir une propriété, plus générale, pour des congruences dans des domaines (clos) différents

Si une congruence $\overline{\beta}$, *dans* B, *y est permutable avec une autocorrespondance* α *et si* α *est elle-même congruence dans un domaine* A, *contenu dans* B, *la valeur commune des produits*

$$\delta = \alpha \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \alpha \qquad \text{(dans B)}.$$

est congruence dans le domaine $D = A.(\overline{\beta})$, (formé des éléments congrus à ceux de A, mode $\overline{\beta}$ (n° 5)] *qui est clos* pour $\overline{\beta}$, mais aussi *pour* δ.

La congruence, δ dans D, est la *plus faible conséquente commune de* $\overline{\alpha}$ *dans* A, *et* $\overline{\beta}$ *dans* D.

Cette propriété comprend comme cas particulier la précédente, en prenant $H = B = A = D$.

10. *Prolongement d'un produit.* — Pour démontrer la propriété, je vais d'abord étudier le produit d'une congruence par une autocorrespondance, en établissant le lemme suivant.

Je considère une *congruence* β, *de domaine clos* B et une *autocorrespondance* α, *de domaine clos* A, *contenu dans* B; je suppose α et $\overline{\beta}$ *permutables dans* B :

$$(x \text{ ou } y \in B) \rightarrow \left(x.(\alpha \times \overline{\beta}).y \rightleftharpoons x.(\overline{\beta} \times \alpha).y\right),$$

ou seulement dans A (remplaçant alors B dans le premier membre); *je forme le domaine* $D = A.(\overline{\beta}) \subset B$ et l'*autocorrespondance* δ, déterminée (dans D) par :

$$(1) \qquad x.(\delta).y \rightleftharpoons \left(\text{Ex. } a, a' \in A : \; x.(\beta).a \text{ et } a.(\alpha).a' \text{ et } a'.(\overline{\beta}).y\right),$$

(*a*) le *domaine* D, clos (et complet) pour β, *est* aussi *clos* (non nécessairement complet) *pour les produits* $\alpha \times \overline{\beta}$, $\overline{\beta} \times \alpha$ (même si la commutativité n'est vraie que dans A);

(*b*) *l'autocorrespondance* δ *est égale à ces produits*, dans D, (ou seulement dans A, si la commutativité n'a lieu que dans A).

La propriété (x) exprime les appartenances (à D) des sujets et des images des produits; les démonstrations de ces deux appartenances sont corrélatives, je ne donne que celle des images. Je choisis un élément x, dans D, qui ait une image y par le produit $\alpha \times \overline{\beta}$:

$$\left(x \in D \text{ et } x.(\alpha \times \overline{\beta}).y\right) \rightarrow \left(\text{Ex. } a \in A \text{ et } a.(\overline{\beta}).x \text{ et } x.(\alpha \times \overline{\beta}).y\right)$$
$$\rightarrow \left(\text{Ex. } a \in A \text{ et } a.(\overline{\beta} \times \alpha \times \overline{\beta}).y\right).$$

Mais a étant dans Λ, je puis, dans cette expression, permuter α et β, puis appliquer la tautologie, j'obtiens les conséquences :

$$a.(\alpha\times\bar\beta).y \;\to\; \big(\text{Ex. } u\text{: } a.(\alpha).u \text{ et } u.(\bar\beta).y\big);$$

Λ étant clos pour α, u est dans Λ et y est dans D. Je n'ai pas eu à supposer que D était complet pour le produit $\alpha\times\bar\beta$.

Pour établir la propriété (b), je vais d'abord, dans le cas de la commutativité dans D, montrer l'équivalence de la condition (I) avec :

$$\text{(II)} \qquad x \text{ et } y\in D \text{ et } x.(\alpha\times\bar\beta).y.$$

D'une part (I) entraîne (II), car d'après la construction de D :

$$\big(a, a'\in\Lambda \text{ et } x.(\beta).a \text{ et } a'.(\bar\beta).y\big) \;\to\; (x \text{ et } y\in D);$$

en outre, x et y étant dans D :

$$\text{(I)} \;\to\; x.(\bar\beta\times\alpha\times\bar\beta).y \;\to\; x.(\alpha\times\bar\beta\times\bar\beta).y \;\to\; x.(\alpha\times\bar\beta).y.$$

Je cherche, d'autre part, une conséquence de (II) :

$$\big(x\in D \text{ et } x.(\alpha\times\bar\beta).y\big) \;\to\; \big(\text{Ex. } a\in\Lambda \text{ et } a.(\beta).x \text{ et } x.(\alpha\times\bar\beta).y\big)$$
$$\to\; \big(\text{Ex. } a\in\Lambda \text{ et } x.(\beta).a \text{ et } a.(\bar\beta\times\alpha\times\bar\beta).y\big);$$

comme a est dans $\Lambda\subset B$, on peut permuter α et β, et remplacer $\bar\beta\times\bar\beta$ par β, de sorte que (II) entraîne :

$$\big(\text{Ex. } a, u\text{: } a\in\Lambda \text{ et } x.(\beta).a \text{ et } a.(\alpha).u \text{ et } u.(\bar\beta).y\big);$$

mais Λ étant domaine clos pour α, u est un élément a' de Λ, ce qui donne bien la condition (I).

Si la commutativité n'a lieu que dans Λ, j'établis seulement l'équivalence :

$$\text{(I)} \;\rightleftarrows\; x.(\alpha\times\bar\beta).y\text{:}$$

en supposant l'appartenance (x ou $y\in\Lambda$). La démonstration de l'implication gauche-droite reste valable. L'implication droite-gauche résulte, plus simplement, des implications corrélatives :

$$x\in\Lambda \;\to\; \big(x.(\alpha\times\bar\beta).y \;\to\; \big(\text{Ex. } a'\in\Lambda;\ x.(\bar\beta).x \text{ et } x.(\alpha).a' \text{ et } a'.(\bar\beta).y\big)\big),$$
$$y\in\Lambda \;\to\; \big(x.(\bar\beta\times\alpha).y \;\to\; \big(\text{Ex. } a\in\Lambda;\ x.(\bar\beta).a \text{ et } a.(\alpha).y \text{ et } y.(\bar\beta).y\big)\big).$$

La condition (I) construit δ dans D, en n'utilisant que la seule détermination de $\bar\alpha$ dans A; elle réalise, en quelque sorte le *prolongement* dans D de l'autocorrespondance (ou congruence) déterminée dans A par les produits égaux. Mais, si α admet B pour domaine complet, en y étant permutable avec β, la valeur commune des produits :

$$\delta = \alpha\times\bar\beta = \bar\beta\times\alpha \qquad \text{(dans B)},$$

est une autocorrespondance ayant B pour domaine complet et qui est égale à l'autocorrespondance $\hat{\delta}$ dans D.

11. *Qualités du produit (prolongé).* — Pour établir la propriété énoncée, il n'y a plus qu'à compléter les conclusions du lemme, dans le cas où α est congruence, ce qui donne l'énoncé complémentaire :

(*c*) *Si α est congruence dans* A, *l'autocorrespondance* $\hat{\delta}$, déterminée par la condition (I), ou par son égalité aux produits dans D, *est une congruence dans* D.

Il suffit de vérifier que δ a bien les qualités d'une égalité. Elle est *réflexive* :

$$x\in D \rightarrow \left(\text{Ex. } a\in A \text{ et } x.(\bar\beta).a \text{ et } a.(\alpha).a \text{ et } a.(\bar\beta)..x\right) \rightleftharpoons x.(\delta).x;$$

elle est *symétrique* :

$$\left(\text{Ex. } a, a'\in A \text{ et } x.(\bar\beta).a \text{ et } a.(\bar\alpha).a' \text{ et } x'.(\bar\beta).y\right)$$
$$\rightleftharpoons \left(\text{Ex. } a', a\in A \text{ et } y.(\beta).a' \text{ et } a'.(\bar\alpha).a \text{ et } a.(\bar\beta).x\right),$$

elle est *transitive* :

$$\left(\text{Ex. } a_1, a'_1, a_2, a'_2\in A \text{ et } x.(\bar\beta).a_1 \text{ et } a_1.(\bar\alpha).a'_1 \text{ et } a'_1.(\bar\beta).y \right.$$
$$\left. \text{et } y.(\beta).a_2 \text{ et } a_2.(\bar\alpha).a'_2 \text{ et } a'_2.(\bar\beta).z\right)$$
$$\rightarrow \left(x.(\bar\beta).a_1 \text{ et } a_1.(\bar\alpha\times\bar\beta\times\beta\times\bar\alpha).a'_2 \text{ et } a'_2.(\bar\beta).z\right)$$
$$\rightarrow \left(x.(\bar\beta).a_1 \text{ et } a_1.(\bar\alpha).a'' \text{ et } a''.(\bar\beta).a'_2 \text{ et } a'_2.(\bar\beta).z\right)$$
$$\rightarrow \left(x.(\bar\beta).a_1 \text{ et } a_1.(\bar\alpha).a'' \text{ et } a''.(\beta).z\right).$$

Le *domaine de totalité* de la congruence $\hat{\delta}$ est $D = \bar A.(\bar\beta) \subset D$, construit en prenant les éléments congrus, mode β, aux éléments du domaine de totalité $\bar A$ de $\bar\alpha$; il contient les domaines de totalité $\bar A$ de $\bar\alpha$ et $\bar B$ de β. Même si la commutativité n'est vraie que dans A, comme e est dans A, il en résulte la suite d'équivalences :

$$e.(\bar\delta).y \rightleftharpoons e.(\bar\beta\times\bar\alpha).y \rightleftharpoons e.(\bar\alpha\times\bar\beta).y \rightleftharpoons y\in\bar A.(\beta).$$

En outre tout élément congru à e, mode $\bar\alpha$, ou mode $\bar\beta$, est aussi congru mode $\bar\alpha\times\bar\beta$ (n° 4. *a*). Si la commutativité a lieu dans D, le domaine de totalité est encore égal à $\bar D = \bar B.(\alpha)$, obtenu en prenant indifféremment les sujets ou les images des éléments de $\bar B$, suivant l'autocorrespondance α.

Reste à montrer que $\bar\delta$ est la plus faible conséquente commune, dans D (la commutativité étant vraie dans B). D'une part α et $\bar\beta$ impliquent $\bar\delta = \alpha\times\bar\beta = \bar\beta\times\alpha$, dans D, car (*voir* aussi n° 4. *a*)

$$\left(x\in D \text{ et } x.(\alpha).y\right) \rightarrow \left(x.(\alpha).y \text{ et } y.(\bar\beta).y\right) \rightarrow x.(\bar\delta).y$$
$$\left(x\in D \text{ et } x.(\bar\beta).y\right) \rightarrow \left(\text{Ex. } a\in A \text{ et } x.(\bar\beta).a \text{ et } x.(\bar\beta).y\right)$$
$$\rightarrow \left(x.(\bar\beta).a \text{ et } a.(\bar\alpha).a \text{ et } a.(\bar\beta).y\right) \rightarrow x.(\bar\delta).y.$$

D'autre part toute congruence $\bar{\lambda}$, dans D, impliquée par les autocorrespondances α et β est impliquée par leur produit, car :

$$(\alpha \rightarrow \bar{\lambda} \text{ et } \bar{\beta} \rightarrow \bar{\lambda}) \rightarrow (\alpha \times \bar{\beta} \rightarrow \bar{\lambda} \times \bar{\lambda} = \bar{\lambda}).$$

Le même raisonnement montre que $\bar{\delta}$, *déterminée dans son domaine de totalité* $\bar{D} = \bar{A}.(\bar{\beta}) = \bar{B}.(\alpha)$, *y est la plus faible conséquente commune* de $\bar{\alpha}$ *dans* (son domaine de totalité) $\bar{A}$ *et de* $\bar{\beta}$ *dans* (son domaine de totalité) $\bar{B}$.

12. *Correspondance de quotients.* — En précisant une notion déjà donnée (*R. S.*, 3, 12, 30), je dis que $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans A_1 est un *quotient de congruences*, si $\bar{\alpha}_1$ est congruence dans A_1 et si $\bar{\alpha}_0$ *est congruence et implique* $\bar{\alpha}_1$, dans A_1 (qui est par suite aussi domaine clos de $\bar{\alpha}_0$).

Les conditions de congruence et d'implication de $\bar{\alpha}_0$ sont vérifiées *a fortiori*, dans toute partie de A_1, notamment dans le domaine de totalité $\bar{A}_1$ de $\bar{\alpha}_1$. Si $\bar{\alpha}_1$ est seulement considérée dans ce domaine de totalité, les conditions d'implication de $\bar{\alpha}_0$ sont équivalentes à la seule condition que $\bar{\alpha}_0$ soit congruence dans $\bar{A}_1$ domaine clos. L'implication en résulte évidemment.

A un quotient de congruences, $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans A_1 (peut être égal à $\bar{A}_1$); j'associe un *ensemble quotient* (*R. S.*, 30) $\bar{A}_1 | \bar{\alpha}_0$ obtenu en répartissant en *classes* suivant la congruence $\bar{\alpha}_0$, le domaine de totalité $\bar{A}_1$, de $\bar{\alpha}_1$. Cet ensemble quotient contient notamment comme classe le domaine de totalité $\bar{A}_0$ de $\bar{\alpha}^0$.

Je dis que *deux quotients de congruences :* $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans A_1, et $\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_0$ dans B_1, *sont correspondants, lorsque :*

$$[\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_0] = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_1];$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_1 \times \beta_0 = \alpha_0 \times \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_1 \times \bar{\alpha}_0 = \beta_0 \times \bar{\alpha}_1 \end{array}\right\} \quad \text{dans} \quad M_1 = [A_1, B_1].$$

[Ces conditions ont déjà été données pour des congruences définies dans E (*R. S.*, 31); je remplace seulement ici le domaine E par l'intersection M_1 des domaines clos]. Dans la première égalité les deux membres, qui ne sont pas vides, sont des congruences, dans M_1; il en est de même des conjonctions $[\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1]$, $[\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]$, et il en résulte :

$$[\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_0] = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_1] = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_0] = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0].$$

Mais les deux égalités des produits ne sont plus nécessairement équivalentes.

La correspondance entraine encore une équipotence (*R. S.*, 12 et 31).

Si deux quotients de congruences, $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans A_1 et $\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_0$ dans B_1, *sont correspondants, les ensembles quotients associés* $\bar{A}_1 | (\bar{\alpha}_0)$ et $\bar{B}_1 | (\bar{\beta}_0)$ *sont équipotents.*

13. *Démonstration de l'équipotence.* — La méthode de démonstration déjà donnée (*R. S.*, 32) pour des congruences dans E, reste valable sauf quelques précisions complémentaires. Elle consiste à établir l'équipotence de chacun des deux ensembles quotients avec l'ensemble quotient :

$$\overline{M}_1 \,|\, (\overline{\mu}_0); \qquad \overline{M}_1 = [\overline{A}_1, \overline{B}_1]; \qquad \overline{\mu}_1 = [\overline{\alpha}_1, \overline{\beta}_1]; \qquad \overline{\mu}_0 = [\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0].$$

$\overline{\mu}_1$ et $\overline{\mu}_0$ sont congruences dans $M_1 = [\overline{A}_1, \overline{B}_1]$ et $\overline{M}_1$ est domaine de totalité de $\overline{\mu}_1$ (n° 8). Les équipotences sont réalisées respectivement par les congruences $\overline{\alpha}_0$, dans $\overline{A}_1$ et $\overline{\beta}_0$ dans $\overline{B}_1$; il suffit d'en démontrer une (en raison de la symétrie des notations), ce que je fais pour la première.

(*a*) *Le domaine de totalité* $\overline{A}_1$, de $\overline{\alpha}_1$, *est égal à* $\overline{M}_1.(\alpha_0)$:

$$x \in \overline{A}_1 \;\rightleftharpoons\; u \in \overline{M}_1 \quad \text{et} \quad u.(\overline{\alpha}_0).x.$$

L'implication droite-gauche résulte de l'implication de $\overline{\alpha}_1$ par $\overline{\alpha}_0$ dans A_1, qui est domaine clos pour les deux :

$$\left(u \in \overline{M}_1 \subset A_1 \quad \text{et} \quad u.(\overline{\alpha}_0).x\right) \rightarrow \left(u \in \overline{M}_1 \quad \text{et} \quad u.(\overline{\alpha}_1).x\right) \rightarrow x \in \overline{A}_1.$$

L'implication gauche-droite résulte de l'égalité des produits dans M :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A}_1 \;&\rightarrow\; \left(e.(\overline{\beta}_0).e \quad \text{et} \quad e.(\overline{\alpha}_1).x\right) \rightarrow \left(e.(\overline{\beta}_0 \times \overline{\alpha}_1).x \quad \text{et} \quad e.(\overline{\alpha}_1).x\right) \\ &\rightleftharpoons \left(e.(\overline{\beta}_1 \times \overline{\alpha}_0).x \quad \text{et} \quad e.(\overline{\alpha}_1).x\right) \rightleftharpoons e.[\overline{\beta}_1 \times \overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1].x \\ &\rightleftharpoons e.([\overline{\beta}_1, \overline{\alpha}_1] \times \overline{\alpha}_0).x \rightleftharpoons \left(u \in \overline{M}_1 \quad \text{et} \quad u.(\overline{\alpha}_0).x\right). \end{aligned}$$

L'autre égalité démontrerait que tout élément de A est sujet, mode $\overline{\alpha}_0$, d'un élément de $\overline{M}_1$, ce qui est un résultat équivalent. En réalité je n'ai pas utilisé l'égalité des produits dans $\overline{M}_1$, mais un résultat plus restreint : l'égalité des produits pour le sujet *e* et pour une image appartenant à $\overline{A}_1$.

(*b*) *A toute classe de* $\overline{M}_1 \,|\, (\overline{\mu}_0)$, définie par un représentant *u*, *correspond la classe* de $\overline{A}_1 \,|\, (\overline{\alpha}_0)$, définie par le même représentant *u* et la contenant.

(*c*) Réciproquement, *à toute classe* C de $\overline{A}_1 \,|\, (\overline{\alpha}_0)$ *correspond une et une seule classe de* $\overline{M}_1 \,|\, (\overline{\mu}_0)$, constituée par tous ceuxde ses éléments qui sont dans $\overline{M}_1$.

Pour le montrer il suffit de vérifier : d'une part que l'intersection $[\overline{M}_1, C]$ n'est pas vide, ce qui résulte de (*a*); un élément *u* (quelconque) de A_1, définissant la classe C, est congru, mode $\overline{\alpha}_0$, au moins à un élément de $\overline{M}_1$; d'autre part que deux éléments de cette intersection sont congrus, mode $\overline{\mu}_0 = [\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0]$; c'est ce qui résulte de l'égalité des conjonctions dans M_1 et, *a fortiori* dans $\overline{M}_1$:

$$\begin{aligned} &\left(u.(\overline{\alpha}_0).u' \text{ et } u.[\overline{\alpha}_1, \beta_1].u'\right) \\ &\quad \rightleftharpoons u.[\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \beta_1].u' \rightleftharpoons u.[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_1].u' \rightleftharpoons u.[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0].u'. \end{aligned}$$

II. — Les suites de composition locales.

14. *Demi-treillis d'autocorrespondances.* — Ainsi que je l'ai déjà fait (*R. S.*, 37), je considère, dans un ensemble E, où je distingue un élément e, une famille $\mathfrak{S}$, d'autocorrespondances, de domaine complet E, que j'appelle un *demi-treillis* et qui vérifie les deux conditions d'appartenance suivantes :

1° $\mathfrak{S}$ *contient la disjonction* de toute partie de $\mathfrak{S}$ (finie ou infinie); ce qui est la plus faible conséquente commune de cette partie (n°s 3 et 4-1);

2° $\mathfrak{S}$ *contient le produit* (n° 4-2) de tout couple, et, par suite, de tout système fini de ses éléments.

15. *Congruences permises.* — Je considère, dans $\mathfrak{S}$ une *famille* $\mathfrak{F}$ *de congruences*, que j'appelle *permises*, ou, plus précisément, une famille d'autocorrespondances, dont chacune α est congruence dans un domaine clos A, contenant e. Je suppose que cette famille vérifie les trois conditions suivantes, dont deux d'appartenance; elles seront justifiées, d'une part par leurs conséquences, d'autre part par l'application aux hypergroupes (§ III).

3° Pour tout couple (¹) de congruences de $\mathfrak{F}$: $\overline{\alpha}$ dans A et $\overline{\beta}$ dans B, *la conjonction* $[\overline{\alpha}, \overline{\beta}]$, *déterminée dans* $[A, B]$, où elle est égale à la congruence α, *appartient à* $\mathfrak{F}$ (par symétrie des notations il en est de même de $[\overline{\alpha}, \overline{\beta}]$ dans $[\overline{A}, B]$, où elle est égale à $\overline{\beta}$.

4° Pour tout couple de congruences de $\mathfrak{F}$, $\overline{\alpha}$ dans $A \subset B$ et $\overline{\beta}$ dans B, définies par des autocorrespondances α et β, permutables dans B, *le produit* $\overline{\delta} = \alpha \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \alpha$, *qui est une congruence, dans* $A.(\overline{\beta}) = D$ (n° 9), *appartient à* $\mathfrak{F}$.

La cinquième condition est analogue à celle qui a été énoncée pour les congruences dans E (*R. S.*, 37), mais avec précision des domaines :

5° Si β est une congruence de domaine clos B et α une autocorrespondance telle que $\alpha \times \overline{\beta}$ (ou $\overline{\beta} \times \alpha$) ait un domaine clos D inclus dans B, *le produit* $\delta_1 \times \overline{\beta}$ (ou $\overline{\beta} \times \delta_1$), *où* δ_1 (ou δ_1) *est une antécédente du produit* $\alpha \times \beta$ (ou $\overline{\beta} \times \alpha$) *est égal* (dans D) *à un produit* $\alpha_1 \times \overline{\beta}$ (ou $\beta \times \alpha_1$); α_1 (ou α_1) *étant une antécédente de* α :

$$(\delta_1 \to \alpha \times \overline{\beta}) \to (\text{Ex. } \alpha_1 : \alpha_1 \to \alpha \text{ et } \delta_1 \times \overline{\beta} = \alpha_1 \times \beta),$$
$$(\delta_1 \to \overline{\beta} \times \alpha) \to (\text{Ex. } \alpha_1 : \alpha_1 \to \alpha \text{ et } \overline{\beta} \times \delta_1 = \overline{\beta} \times \alpha_1).$$

(¹) On pourrait adopter la convention plus restrictive que la conjonction $[\alpha, \beta]$ déterminée dans l'intersection [A, B] (contenant les intersections $[A, \overline{B}]$ et $[\overline{A}, B]$) appartient à $\mathfrak{F}$. Mais cette condition ne serait pas vérifiée par l'application aux hypergroupes.

16. *Invariance.* — La définition de l'invariance (*R. S.*, 38) reste aussi valable, sauf précision du domaine.

Je dis qu'*une congruence* (de $\mathcal{F}$), $\bar{\beta}$ dans B, *est invariante* — ou distinguée — *relativement à une congruence* $\bar{\alpha}$ (de $\mathcal{F}$), *lorsqu'elle est permutable, dans* B, *avec toute antécédente* α_i de $\bar{\alpha}$ (α_i dans $\mathcal{E}$) :

$$(\alpha_i \in \mathcal{E} \text{ et } \alpha_i \rightarrow \bar{\alpha}, \text{ et } x \text{ ou } y \in \mathrm{B}) \rightarrow \left(x.(\alpha_i \times \bar{\beta}).y \rightleftharpoons x.(\bar{\beta} \times \alpha_i).y\right),$$

$\bar{\beta}$ est notamment permutable avec $\bar{\alpha}$. Si $\bar{\beta}$ est invariante relativement à $\bar{\alpha}$, elle l'est, *a fortiori*, relativement à toute antécédente $\bar{\alpha}'$ de $\bar{\alpha}$.

Je considère un *quotient de congruences* $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$, *dans* A_1 [$\bar{\alpha}_0$ impliquant $\bar{\alpha}_1$, (n° 12) dans son domaine (clos) A_1] la conséquence $\bar{\alpha}_1$ est invariante relativement à l'antécédente $\bar{\alpha}_0$, en raison de la loi d'absorption (n° 7) : A_1 étant clos pour $\bar{\alpha}_1$ et complet pour toute autocorrespondance de $\mathcal{E}$:

$$(\alpha_i \rightarrow \bar{\alpha}_0 \rightarrow \bar{\alpha}_1) \rightarrow (\alpha_i \times \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1 \times \alpha_i); \quad \text{dans } A_1.$$

Je dis que *ce quotient est normal* — ou que $\bar{\alpha}_0$ est invariante dans $\bar{\alpha}_1$ — *si*, inversement, *la congruence* $\bar{\alpha}_0$ *est invariante relativement à* $\bar{\alpha}_1$, considérée comme autocorrespondance *dans* A_1 (domaine clos commun de $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_0$) :

$$(\alpha_i \rightarrow \bar{\alpha}_1) \rightarrow (\alpha_i \times \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_0 \times \alpha_i), \quad \text{dans } A_1.$$

D'après la remarque précédente un quotient unité est normal. J'utiliserai, plus spécialement, des quotients normaux $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans le domaine de totalité $\bar{A}_1$ (de la conséquente).

17. *Quotient de conjonctions.* — Les théorèmes sur la formation d'un quotient normal par conjonctions (*R. S.*, 39) ou par produits (*R. S.*, 40) restent valables dans des domaines convenables.

Si un quotient de congruences (de $\mathcal{F}$) : $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$, *dans* A_1 *est normal, les conjonctions de ses termes avec une congruence* β, *dans son domaine de totalité* $\bar{B}$:

$$\bar{\mu}_1 = [\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}] \quad \text{et} \quad \bar{\mu}_0 = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}], \quad \text{dans } M_1 = [A_1, \bar{B}],$$

qui sont encore des congruences (n° 8) de $\mathcal{F}$ (condition 3), *forment un quotient* $\bar{\mu}_1 | \bar{\mu}_0$, *dans* M_1, *qui est normal.*

La propriété est évidente, puisque, dans M_1, les conjonctions $\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_0$ sont respectivement égales à $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_0$ (n° 8). La propriété reste encore vraie si $\bar{\beta}$ est déterminée dans un domaine (clos) B quelconque et les conjonctions dans l'intersection [A_1, B], mais ce ne sont plus alors nécessairement des congruences de $\mathcal{F}$. La démonstration résulte de la distributivité restreinte (*R. S.*, 39).

18. *Quotient de produits.* — *Si un quotient de congruences* (de $\mathcal{F}$) $\bar{\alpha}_1 \mid \bar{\alpha}_0$, dans A_1, *est normal, et si* $\bar{\beta}$ *est une congruence dans* A, contenant A_1, *invariante relativement à* $\bar{\alpha}_1$ (et, *a fortiori*, relativement à $\bar{\alpha}_0$) *les produits* :

$$\bar{\delta}_i = \alpha_1 \times \bar{\beta} = \bar{\beta} \times \alpha_1, \qquad \bar{\delta}_0 = \alpha_0 \times \bar{\beta} = \bar{\beta} \times \alpha_0, \qquad \text{dans} \quad D_1 = A_1.(\bar{\beta}),$$

qui sont encore des congruences (n° 9), de $\mathcal{F}$ (condition 4), *forment un quotient* $\bar{\delta}_1 \mid \bar{\delta}_0$, dans D_1, *qui est normal.*

La commutativité de $\bar{\beta}$ avec α_1 et α_0, dans B, résulte de son invariance; l'implication des produits (dans B) résulte de la loi de combinaison terme à terme (par produit). Reste à préciser la démonstration (déjà donnée *R. S.*, 40) de la normalité.

Je montre que $\bar{\beta}$ est encore invariante, dans D_1, relativement à $\bar{\delta}_1$; j'applique la *condition* 5 à une antécédente δ_i de $\bar{\delta}_1 = \alpha_1 \times \bar{\beta} = \bar{\beta} \times \alpha_1$, dans D_1; il existe des antécédentes α_i et α'_i de α_1, telles que :

$$\delta_i \times \bar{\beta} = \alpha_i \times \bar{\beta}; \qquad \bar{\beta} \times \delta_i = \bar{\beta} \times \alpha'_i, \qquad \text{dans} \quad D_1.$$

Mais d'après la loi d'implication du produit (n° 4, *a*), dans $D_1 \subset B$, qui est domaine clos de $\bar{\delta}_1$, donc de δ_i et où $\bar{\beta}$ est réfléxive :

$$\delta_i \quad \rightarrow \quad \delta_i \times \bar{\beta} = \alpha_i \times \bar{\beta};$$

d'où, en tenant compte de l'invariance de $\bar{\beta}$, relativement à α_1 :

$$\bar{\beta} \times \delta_i \quad \rightarrow \quad \bar{\beta} \times \alpha_i \times \bar{\beta} = \alpha_i \times \bar{\beta} = \delta_i \times \bar{\beta}, \qquad \text{dans} \quad D_1.$$

J'obtiendrais l'implication converse en utilisant α'_i, d'où l'égalité $\bar{\beta} \times \delta_i = \delta_i \times \bar{\beta}$; ce qui permet de prendre $\alpha'_i = \alpha_i$.

J'exprime par ailleurs l'invariance de $\bar{\alpha}_0$ relativement à $\bar{\alpha}_1$:

$$(\alpha_i \quad \rightarrow \quad \bar{\alpha}_1) \quad \rightarrow \quad \alpha_i \times \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_0 \times \alpha_i, \qquad \text{dans} \quad A_1.$$

Ces produits, ainsi que $\bar{\alpha}_0$ et tout α_i, admettent A_1 comme domaine clos et impliquent α_1, ils sont donc permutables avec $\bar{\beta}$, dans $D_1 \subset B$; en outre d'après le raisonnement du n° 10, dans tout produit avec $\bar{\beta}$ (déterminé dans D_1), ils peuvent être remplacés par des autocorrespondances qui leur sont égales dans A_1. Il en résulte la suite d'égalités dans D_1 :

$$\begin{aligned} \delta_i \times \bar{\delta}_0 = \delta_i \times \bar{\beta} \times \alpha_0 = \alpha_i \times \bar{\beta} \times \alpha_0 = \bar{\beta} \times (\alpha_i \times \alpha_0) = \bar{\beta} \times (\alpha_0 \times \alpha_i) \\ = \alpha_0 \times \bar{\beta} \times \alpha_i = \alpha_0 \times \bar{\beta} \times \delta_i = \bar{\delta}_0 \times \delta_i. \end{aligned}$$

19. *Suite de composition normale.* — Je précise la définition donnée pour des congruences de domaine E (*R. S.*, 42). Dans le demi-treillis $\mathfrak{S}$ d'autocorrespondances, contenant la famille $\mathcal{F}$ de *congruences permises*, j'appelle *suite de composition normale*, un système, ordonné et numéroté, de congruences permises,

telle que deux congruences consécutives constituent *un quotient normal, dans le domaine de totalité de la conséquente :*

$$\begin{cases} \overline{\alpha}_{i+1} & \text{congruence de domaine de totalité } \overline{A}_{i+1}; \\ \alpha_i & \text{congruence de domaine clos } \overline{A}_{i+1} \supset \overline{A}_i \\ & \text{invariante relativement à } \overline{\alpha}_{i+1} \end{cases} \qquad (i \text{ de o à } n-1).$$

Dans le cas présent ce n'est plus seulement l'invariance qui a un caractère local (*R. S.*, 42), mais encore la qualité de congruence ; α_i est, *a priori*, une autocorrespondance dans E ; elle est seulement congruence dans le domaine clos $\overline{A}_{i+1}$, contenant son domaine de totalité $\overline{A}_i$.

Les définitions des suites propre et maximale sont sans changement : une suite est *propre* si aucun quotient n'est unité ($\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$, ou α_i congruence non totale, dans $\overline{A}_{i+1}$) ; une suite est *maximale* si elle est propre et s'il est impossible d'y intercaler de congruences de $\mathcal{F}$, de façon à former une nouvelle suite de composition qui soit encore propre (*R. S.*, 19).

20. *Théorèmes de Schreier et de Jordan-Holder.* — Je rappelle les énoncés (*R. S.*, 43), en précisant les domaines.

Si deux suites de composition normales, de congruences permises (de la famille $\mathcal{F}$), **ont les mêmes termes extrêmes**, dans les mêmes domaines de totalité (pour le représentant e) :

$$\overline{\alpha}_0 = \overline{\beta}_0, \qquad \text{dans } \overline{A}_0 = \overline{B}_0; \qquad \overline{\alpha}_p = \overline{\beta}_q, \qquad \text{dans } \overline{A}_p = \overline{B}_q;$$

on peut intercaler des congruences permises (éléments de $\mathcal{F}$)

$$\begin{aligned} &\overline{\alpha}'_{i,j} \text{ de domaine de totalité } \overline{A}'_{i,j}; \quad (j \text{ de o à } q), \qquad \text{entre } \overline{\alpha}_i \text{ et } \overline{\alpha}_{i+1}; \\ &\overline{\beta}'_{j,i} \text{ de domaine de totalité } \overline{B}'_{j,i}; \quad (i \text{ de o à } p), \qquad \text{entre } \overline{\beta}_j \text{ et } \overline{\beta}_{j+1}. \end{aligned}$$

tels que les nouvelles suites contiennent les termes des anciennes :

$$\overline{\alpha}'_{i,0} = \overline{\alpha}'_{i-1,q} = \overline{\alpha}_i; \qquad \overline{\beta}'_{j,0} = \overline{\beta}'_{j-1,p} = \overline{\beta}_j;$$

soient encore des suites de composition normales et qu'en outre les quotients des congruences successives, convenablement appariés,

$$\overline{\alpha}'_{i,j+1} \mid \overline{\alpha}'_{i,j} \qquad \text{avec} \qquad \overline{\beta}'_{j,i+1} \mid \overline{\beta}'_{j,i},$$

soient correspondants (n° 12), ce qui entraîne **l'équipotence des ensembles quotients associés.**

De cet énoncé résulte le théorème de Jordan-Holder pour les suites maximales, où tout terme intercalaire ne peut qu'être égal à un terme déjà existant (*R. S.*, 19, 34, 42).

Si deux suites de composition normales maximales ont les mêmes termes extrêmes, elles ont même longueur (même nombre d'intervalles) **et les quotients, de leurs termes successifs, sont deux à deux correspondants.**

21. *Construction des intercalaires.* — Je détermine encore les intercalaires par les formules de H. Zassenhauss, qui peuvent se mettre sous deux formes, par application de la loi de distributivité restreinte

$$\bar{\alpha}'_{i,j}=\bar{\alpha}_i\times[\bar{\alpha}_{i+1},\ \bar{\beta}_j]=[\bar{\alpha}_{i+1},\ \bar{\alpha}_i\times\bar{\beta}_j],\qquad \text{dans}\quad e.(\bar{\alpha}'_{i,j+1})=\overline{\mathrm{A}}'_{i,j+1}\subset\mathrm{A}_{i+1},$$
$$\bar{\beta}'_{j,i}=\bar{\beta}_j\times[\bar{\beta}_{j+1},\ \bar{\alpha}_i]=[\bar{\beta}_{j+1},\ \bar{\beta}_j\times\bar{\alpha}_i],\qquad \text{dans}\quad e.(\bar{\beta}'_{j,i+1})=\overline{\mathrm{B}}'_{j,i+1}\subset\mathrm{B}_{j+1}.$$

J'établis les propriétés de ces intercalaires, en raisonnant sur la deuxième suite, ce qui suffit, en raison de la symétrie des notations. Les conjonctions de congruences :

$$\mu_{j+1,i}=[\bar{\beta}_{j+1},\ \bar{\alpha}_i];\qquad \mu_{j+1,i+1}=[\bar{\beta}_{j+1},\ \bar{\alpha}_{i+1}];$$

sont des congruences dans l'intersection $[\overline{\mathrm{B}}_{j+1},\ \overline{\mathrm{A}}_{i+1}]$, du domaine de totalité $\overline{\mathrm{B}}_{j+1}$, de $\bar{\beta}_{j+1}$ avec le domaine $\overline{\mathrm{A}}_{i+1}$, clos pour $\bar{\alpha}_i$ et total pour $\bar{\alpha}_{i+1}$; elles y sont d'ailleurs égales respectivement à $\bar{\alpha}_i$ et à $\bar{\alpha}_{i+1}$. Elles appartiennent à $\mathfrak{F}$ (condition 3) et forment un quotient normal (n° 17).

Mais $\bar{\beta}_j$ est une congruence invariante relativement à $\bar{\beta}_{j+1}$, dans $\overline{\mathrm{B}}_{j+1}$, donc permutable avec les antécédentes $\bar{\mu}_{j+1,i}$ et $\bar{\mu}_{j+1,i+1}$, dont le domaine clos $[\overline{\mathrm{B}}_{j+1},\ \overline{\mathrm{A}}_{i+1}]$ est contenu dans $\overline{\mathrm{B}}_{j+1}$. Les produits (commutatifs) :

$$\bar{\beta}'_{j,i}=\bar{\mu}_{j+1,i}\times\bar{\beta}_j;\qquad \bar{\beta}'_{j,i+1}=\bar{\mu}_{j+1,i+1}\times\bar{\beta}_j,$$

sont (n° 9) des congruences dans le domaine clos :

$$[\overline{\mathrm{B}}_{j+1},\ \overline{\mathrm{A}}_{i+1}].(\bar{\beta}_j)=e.([\bar{\beta}_{j+1},\ \bar{\alpha}_{i+1}]\times\bar{\beta}_j)=e.(\bar{\beta}'_{j,i+1})=\overline{\mathrm{B}}'_{j,i+1}\subset\overline{\mathrm{B}}_{j+1};$$

elles appartiennent à $\mathfrak{F}$ (condition 4) et y forment un quotient normal (n° 18). La suite des intercalaires, dans tout intervalle $\bar{\beta}'_{j,0}$, $\bar{\beta}'_{j,p}$ est donc normale.

Je vérifie que les termes extrêmes dans chacun de ces intervalles sont bien égaux aux termes de l'ancienne suite.

La condition $\bar{\alpha}_0=\bar{\beta}_0$, dans $e.(\bar{\alpha}_0)=e.(\bar{\beta}_0)=\overline{\mathrm{A}}_0=\overline{\mathrm{B}}_0$ entraîne

$$\bar{\beta}'_{j,0}=[\bar{\beta}_{j+1},\ \bar{\alpha}_0]\times\bar{\beta}_j=[\bar{\beta}_{j+1},\ \beta_0]\times\bar{\beta}_j=\bar{\beta}_0\times\bar{\beta}_j=\bar{\beta}_j,$$

dans

$$[\overline{\mathrm{B}}_{j+1},\ \overline{\mathrm{A}}_0].(\bar{\beta}_j)=[\overline{\mathrm{B}}_{j+1},\ \mathrm{B}_0].(\beta_j)=\overline{\mathrm{B}}_0.(\bar{\beta}_j)=e.(\bar{\beta}_j\times\bar{\beta}_0)=e.(\bar{\beta}_j)=\overline{\mathrm{B}}_j.$$

En dehors de cette égalité (qui a lieu dans $\overline{\mathrm{B}}_j$), $\bar{\beta}'_{j,0}$ est congruence dans $\overline{\mathrm{B}}'_{j,1}=e.(\bar{\beta}'_{j,1})$.

La condition $\bar{\alpha}_p=\bar{\beta}_q$, dans $e.(\bar{\alpha}_p)=e.(\bar{\beta}_q)=\overline{\mathrm{A}}_p=\overline{\mathrm{B}}_q$ entraîne :

$$\bar{\beta}'_{j,p}=[\bar{\beta}_{j+1},\ \bar{\alpha}_p]\times\bar{\beta}_j=[\bar{\beta}_{j+1},\ \bar{\beta}_q]\times\bar{\beta}_j=\bar{\beta}_{j+1}\times\bar{\beta}_j=\bar{\beta}_{j+1};$$

dans

$$[\overline{\mathrm{B}}_{j+1},\ \overline{\mathrm{A}}_p].(\bar{\beta}_j)=[\overline{\mathrm{B}}_{j+1},\ \overline{\mathrm{B}}_q].(\bar{\beta}_j)=\overline{\mathrm{B}}_{j+1}.(\beta_j)=e.(\bar{\beta}_{j+1}\times\bar{\beta}_j)=e.(\bar{\beta}_{j+1})=\overline{\mathrm{B}}_{j+1};$$

cette fois c'est la congruence $\bar{\beta}'_{j+1,0}$ égale à $\bar{\beta}'_{j,p}$ dans $\overline{\mathrm{B}}_{j+1}$, qui est congruence dans $\overline{\mathrm{B}}'_{j+1,1}$.

Il reste à vérifier la correspondance des quotients appariés, dans l'intersection de leurs domaines clos $[\overline{A}'_{i,j+1}, \overline{B}'_{j,i+1}]$, que je vais remplacer par le domaine $[\overline{A}_{i+1}, \overline{B}_{j+1}]$, qui la contient. Je calcule à cet effet les premiers membres des égalités, en utilisant la forme convenable des intercalaires :

$$[\overline{\alpha}'_{i,j+1}, \overline{\beta}'_{j,i}] = [\overline{\alpha}_{i+1}, \overline{\alpha}_i \times \overline{\beta}_{j+1}, \overline{\beta}_{j+1}, \overline{\beta}_j \times \overline{\alpha}_i] = [\overline{\alpha}_{i+1}, \overline{\beta}_{j+1}, \overline{\alpha}_i \times \overline{\beta}_j],$$

$$\overline{\alpha}'_{i,j+1} \times \overline{\beta}'_{j,i} = \overline{\alpha}_i \times [\overline{\alpha}_{i+1}, \overline{\beta}_{j+1}] \times \overline{\beta}_j \times [\overline{\beta}_{j+1}, \overline{\alpha}_i] = \overline{\alpha}_{i+1} \times \overline{\beta}_{j+1} \times [\overline{\alpha}_{i+1}, \overline{\beta}_{j+1}].$$

La symétrie en i, j des résultats montre que j'obtiendrais les mêmes en calculant les deuxièmes membres des égalités. (Dans l'expression du produit j'ai utilisé la commutativité de β_j avec une antécédente de $\overline{\beta}_{j+1}$; dans les deux cas j'ai utilisé la loi d'absorption, pour supprimer une conséquente dans la conjonction et une antécédente dans le produit.

III. — Application aux hypergroupes.

22. *Opération multiforme.* — Pour construire des autocorrespondances et des congruences dans un ensemble E, j'avais utilisé une opération *interne*, dans E, définissant ainsi un groupe (*R. S.*, 46). Cette construction peut être généralisée en utilisant dans E une opération multiforme, dont le résultat est un complexe — ou partie non vide — de E. Cette conception (1) étant relativement récente, le vocabulaire et les notations en sont encore assez diverses. Je précise d'abord sommairement ceux que j'adopte ici, en insistant sur leurs relations avec les autocorrespondances et les congruences.

Dans l'ensemble E, d'éléments $a, b, \ldots, x, y, \ldots$, appelés *scalaires*, je considère une *opération* — ou loi de composition — externe, qui, à tout couple ordonné de scalaires, (a puis b), fait correspondre un *complexe* que je note $(a.b)$ [élément non vide de l'ensemble $\Sigma(E)$ des parties de E]. Il en résulte la composition de deux complexes A, B qui est cette fois une *opération interne* dans $\Sigma(E)$. Le résultat, que je note A.B, et que j'appelle *produit*, est le complexe constitué par la réunion des résultats des opérations de tout scalaire de A avec tout scalaire de B, (compte tenu de l'ordre) :

$$(x \in \mathrm{A}.\mathrm{B}) \rightleftharpoons \big(\mathrm{Ex.}\ a_i \in \mathrm{A} \quad \text{et} \quad b_j \in \mathrm{B} \quad \text{et} \quad x \in (a_i.b_j)\big).$$

Cette composition comprend comme cas particuliers : la composition d'un scalaire avec un complexe et de deux scalaires entre eux [il suffit de remplacer un scalaire c par le complexe (c) qui l'a pour seul élément] :

$$c.\mathrm{A} = (c).\mathrm{A}; \qquad \mathrm{A}.c = \mathrm{A}.(c); \qquad (a.b) = (a).(b).$$

(1) On sait qu'elle est due à un jeune mathématicien de haute valeur, F. Marty (1934), disparu en 1940 dans une mission aérienne. Elle a fait très rapidement l'objet de nombreux travaux : Drescher et Ore (1938), Griffith; Wall (1937-38), Krasner (1937-40-47); Kuntzmann (1937-40-46), etc. J'ai surtout utilisé le vocabulaire du mémoire de Krasner (*Duke Math. Journ.*, 1940) auquel je renvoie pour les précisions bibliographiques.

Cette opération entre complexes est supposée *associative*; il peut y avoir intérêt à supposer en outre l'existence dans E, d'un scalaire e_0 *neutre* (des deux côtés) :

$$X = X.e_0 = e_0.X; \qquad \text{(tout complexe X de E)}.$$

Il suffit que ces deux propriétés soient vraies pour les complexes réduits à un seul élément scalaire :

$$(x.y).z = x.(y.z); \qquad (x) = (x.e_0) = (e_0.x); \qquad (x, y, z \in E);$$

elles le sont alors pour tous les complexes de E.

23. *Autocorrespondances associées aux complexes.* — Par analogie avec ce qui a été fait pour les groupes (*R. S.*, 46), à un complexe A, de E, *j'associe deux autocorrespondances corrélatives :* α à droite et α' à gauche définies par les conditions d'appartenances (au lieu d'égalités) :

$$x.(\alpha).y \rightleftharpoons y \in x.A; \qquad x.(\alpha').y \rightleftharpoons y \in A.x; \qquad (x, y \in E).$$

Les définitions et les propriétés des deux autocorrespondances (à droite et à gauche) sont manifestement *corrélatives*; je les exposerai seulement pour les premières α. Éventuellement, je préciserai lorsqu'il y aura lieu de les considérer simultanément. Il est à remarquer que la construction des sujets, à partir d'une image n'est plus cette fois de même nature (comme cela avait lieu pour les groupes) que la construction des images, à partir d'un sujet.

L'association des autocorrespondances α et α' au complexe A est seulement univoque : α et α' sont déterminées par A, mais il peut se faire que des complexes inégaux définissent un même couple d'autocorrespondances. Il y a cependant biunivocité, s'il existe un scalaire neutre e_0, car :

$$\left(e_0.(\alpha).x \rightleftharpoons e_0.(\beta).x\right) \rightleftharpoons (e_0.A = e_0.B) \rightleftharpoons (A = B).$$

L'inclusion des complexes entraîne l'implication des autocorrespondances associées (d'un même côté) :

$$(A_0 \subset A_1) \rightarrow (x.A_0 \subset x.A_1) \rightarrow \left(x.(\alpha_0).y \rightarrow x.(\alpha_1).y\right);$$

il n'y a pas nécessairement réciprocité.

Au produit de deux complexes est associé le produit des autocorrespondances associées, et réciproquement, car, en raison de l'associativité :

$$\begin{aligned} y \in x.(A.B) &\rightleftharpoons (\text{Ex. } u: \ u \in x.A \ \text{ et } \ y \in u.B) \\ &\rightleftharpoons \left(\text{Ex. } u: \ x.(\alpha).u \ \text{ et } \ u.(\beta).y\right) \rightleftharpoons x.(\alpha \times \beta).y. \end{aligned}$$

L'ordre est renversé pour les autocorrespondances à gauche (tenant compte des conventions d'écriture) : à $A \times B$ est associée $\beta' \times \alpha'$.

24. *Hypergroupes.* — Pour qu'un ensemble E soit *un domaine pour les autocorrespondances*, γ et γ', *corrélatives associées* à tout *complexe* C (de E), *il faut et il suffit que* E *soit neutre dans la composition* (des deux côtés) *avec chacun de ses éléments :*

$$(1) \qquad (c \in E) \rightarrow (E.c = c.E = E);$$

il est alors naturellement domaine clos (pour toutes γ, γ').

Cette condition entraîne naturellement une même neutralité pour la composition de E avec tout complexe C :

$$(1\ bis) \qquad (C \subset E) \rightarrow (E.C = C.E = E).$$

D'après la convention de la loi de composition dans E, les ensembles $x.C$ et $C.x$ ne sont pas vides et sont nécessairement contenus dans E, ce qui est équivalent aux inclusions :

$$E.C \subset E; \qquad C.E \subset E.$$

Tout élément x (de E) a nécessairement des images dans les autocorrespondances associées (des deux côtés) à tout complexe C.

Inversement pour qu'un élément y (de E) ait des sujets dans les autocorrespondances γ et γ' associées au complexe C, il faut et il suffit que :

$$(y \in E) \rightarrow (\text{Ex. } x, x' \in E, y \in x.C \quad \text{et} \quad y \in C.x');$$

ce qui est équivalent aux inclusions :

$$E \subset E.C; \qquad E \subset C.E;$$

qui jointes aux précédentes donnent les égalités de l'énoncé.

Un ensemble E, où est définie *une opération multiforme associative et qui vérifie la condition* (1) [et par suite (1 *bis*)] *est* appelé par la plupart des auteurs *un hypergroupe* (de préférence au terme multigroupe adopté d'abord par F. Marty); je le désigne en principe par la lettre H.

Ce nom peut être justifié en remarquant que les conditions de définition expriment que d'une part les résultats de la composition (associative) d'éléments de H sont dans H; d'autre part les *opérations inverses* (de la composition) *sont possibles* dans H. En ce sens un groupe est un cas particulier d'hypergroupe.

Les autocorrespondances ω, ω' associées à H lui-même (définies par la disjonction de toutes les autocorrespondances associées aux éléments de H) sont *congruences totales* dans H (n° 5).

En effet deux éléments quelconques x, y de H vérifient les conditions

$$y \in x.H, \qquad x \in y.H;$$

chacun d'eux est image et sujet de l'autre, mode ω (et par corrélation mode ω').

25. *Sous-hypergroupes.* — *Pour qu'un complexe* A, *d'un hypergroupe* H, *soit lui-même un hypergroupe, pour la loi de composition* de H, c'est-à-dire qu'il contienne les résultats de l'opération sur tout couple de ses éléments et que les opérations inverses y soient possibles, *il faut et il suffit qu'il reste neutre* dans la composition avec chacun de ses éléments

$$(1') \qquad (a \in A) \rightarrow (A.a = a.A = A).$$

Suivant le vocabulaire des groupes, un tel complexe peut être appelé, *sous-hypergroupe* (ou partie *stable* suivant le vocabulaire de N. Bourbaki).

Un *sous-hypergroupe* A (d'un hypergroupe H) est un *domaine complet* pour les autocorrespondances γ et γ' associées à tout complexe C.

Tout élément x de A a une image, mode γ (ou γ'), contenue dans A; et toute image est même contenue dans A

$$\left(x \in A \quad \text{et} \quad x.(\gamma).x'\right) \rightarrow (\text{Ex. } c \in A \quad \text{et} \quad x' \in x.c \subset A.c = A)$$

En outre x est image d'au moins un élément x'' de A

$$(A = A.C \quad \text{et} \quad x \in A) \rightarrow (\text{Ex. } x'' \in A \quad \text{et} \quad x \in x''.C) \rightarrow x''.(\gamma).x.$$

Mais A n'est que partiellement clos pour γ (ou γ') : les images d'un élément x de A sont toutes dans A, mais il peut se faire qu'un élément x de A, qui a toujours au moins un sujet (mode γ), dans A, en ait d'autres (dans H), extérieures à A. En particulier les autocorrespondances associées à A, peuvent ne pas l'admettre pour domaine de totalité. Pour ces raisons, il est intéressant de considérer des sous-hypergroupes, plus spéciaux, obtenus en complétant (1') par une condition restrictive.

26. *Sous-hypergroupes clos.* — Pour qu'un complexe A, d'un hypergroupe H, soit *domaine complet et clos* (dans H), *des autocorrespondances*, *associées à tous ses complexes* (et notamment à tous ses éléments a), *il faut et il suffit qu'il soit sous-hypergroupe et vérifie*, en outre, *la condition*

$$(2) \qquad x \in H \begin{cases} \text{et} \quad [x.A, A] \text{ non vide} \rightarrow x \in A, \\ \text{et} \quad [A.x, A] \text{ non vide} \rightarrow x \in A. \end{cases}$$

Cette condition peut être remplacée par sa contraposée : *la composition de* A *avec un élément*, de H, *extérieur à* A, *donne un ensemble sans élément commun avec* A. Si cette condition est vérifiée dans H, elle l'est, *a fortiori*, dans tout sous-ensemble de H.

J'exprime que A est domaine complet et clos (dans H) pour l'autocorrespondance associée (à droite) à l'élément a (de A) (n° 2)

$$(x \in A) \rightarrow (\text{Ex. } x', x'' \in A \quad \text{et} \quad x' \in x.a \quad \text{et} \quad x \in x''.a),$$
$$(x, y \in H \quad \text{et} \quad y \in x.a) \rightarrow (x \in A \quad \text{et} \quad y \in A).$$

Tenant compte de ce que la composition de deux éléments de H est un complexe (non vide), il est aisé de montrer que ces conditions sont équivalentes à

$$(a\in A \rightarrow A.a) \text{ et } \big((x\in H \text{ et } [x, A, A] \text{ non vide}) \rightarrow x\in A\big).$$

En complétant par le raisonnement corrélatif pour l'autocorrespondance à gauche, j'obtiens bien l'équivalence énoncée. (Il est à remarquer que la neutralité dans la composition à droite avec a (dans (1')) est associée à la composition à gauche avec x (dans (2)).)

Un sous-hypergroupe vérifiant la condition (2) *est appelé sous-hypergroupe clos*, je le représente par une lettre surlignée $\overline{A}$ et je le désigne par l'abréviation *s. h. c.* Éventuellement tout *s. h. c.* contient le scalaire neutre e_0 (s'il existe), puisque $e_0.A = A.e_0 = A$ a tous ses éléments communs avec A.

La notion de *s. h. c.* peut encore être justifiée par la propriété caractéristique suivante :

la condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe A, d'un hypergroupe H, *soit domaine de totalité* (pour un de ses éléments e) *des deux autocorrespondances associées* α et α', *est qu'il soit sous-hypergroupe clos.*

Si A est domaine de totalité pour α et α', il est clos pour toute antécédente, et, notamment, pour les autocorrespondances associées à un de ses éléments, il est, en même temps, complet, puisque H l'est. Réciproquement, si $\overline{A}$ est domaine clos et complet pour α et α', c'est l'ensemble des sujets, aussi bien que des images, d'un (quelconque) de ses éléments e, car pour α par exemple

$$e.(\alpha).x' \rightleftharpoons x'\in eA = A;$$
$$x''.(\alpha).e \rightleftharpoons (e\in x''.A \text{ et } e\in A) \rightarrow x''\in A = x''.A.$$

Il en résulte qu'il n'y a qu'un complexe auquel sont associés α et α'; *l'association s. h. c. et congruences totales corrélatives est biunivoque.*

Pour qu'*une autocorrespondance* γ, associée à un complexe C, *implique une autocorrespondance* α, *associée à un s. h. c.* $\overline{A}$ (du même côté), *il faut et il suffit que* C *soit inclus dans* $\overline{A}$

$$(\gamma \rightarrow \alpha) \rightleftharpoons (C\subset\overline{A}).$$

La condition suffisante (implication droite gauche) a déjà été établie (n° 25) pour un complexe A quelconque. Je démontre la nécessaire, pour des autocorrespondances associées à droite,

$$\big(x.(\gamma).y \rightarrow x.(\alpha)\big) \rightleftharpoons \big(x.C\subset x.\overline{A}\big);$$

ceci entraîne notamment :

$$(c\in C \text{ et } a\in\overline{A}) \rightarrow a.c\subset a.C\subset a.\overline{A} = \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{A}.c\subset\overline{A}$$

d'où, puisque $\overline{A}$ est clos,

$$c\in C \rightarrow (A.c\subset\overline{A}) \rightarrow c\in\overline{A} \text{ et } C\subset\overline{A}.$$

La qualité de sous-hypergroupe clos peut être définie *relativement*, pour un complexe A_0 dans un *s. h. c.* $\overline{A}_1$; il est facile de vérifier que c'est une relation *transitive* :

si $\overline{A}_0$ est *s. h. c.* dans $\overline{A}_1$ et si $\overline{A}_1$ est *s. h. c.* dans H, il en résulte que $\overline{A}_1$ est *s. h. c.* dans H.

Dans le cas où H est un groupe G, tout sous-groupe de G est sous-hypergroupe clos.

27. *Congruence (non totale).* — Dans le cas d'un groupe G, l'autocorrespondance associée à un sous-groupe A (qui est *s. h. c.*) est congruence totale dans A, mais aussi congruence dans G. Il n'en est plus de même dans un hypergroupe.

L'autocorrespondance α_0, associée (d'un côté) à un *s. h. c.* $\overline{A}_0$ (de H) est congruence totale dans $\overline{A}_0$ et peut être exceptionnellement congruence dans un domaine clos $\overline{A}_1$, qui est alors nécessairement un *s. h. c.* contenant $\overline{A}_0$; elle y implique la congruence totale $\overline{\alpha}_1$, associée à $\overline{A}_1$. Il peut être utile d'exprimer la qualité de congruence dans $\overline{A}_1$ par une condition équivalente de répartition en un ensemble quotient.

Pour que, dans le *s. h. c.* $\overline{A}_1$, contenant le *s. h. c.* $\overline{A}_0$, *l'autocorrespondance* $\overline{\alpha}_0$, associée à droite (ou à gauche) à $\overline{A}_0$, *soit encore une congruence, il faut et il suffit que les ensembles* $a.\overline{A}_0$ (ou $\overline{A}_0.a$), d'images des éléments a de A_1, *constituent*, dans $\overline{A}_1$, *des classes disjointes*, formant un *ensemble quotient.*

Je rappelle que les conditions de disjonction sont : que la réunion des classes soit égale à $\overline{A}_1$ et que deux classes soient ou bien égales, ou bien sans élément commun (intersection vide).

La condition est manifestement *nécessaire* : une classe $a.\overline{A}_0$ est l'ensemble des images de a; si elle a un élément commun avec une autre classe $a'.\overline{A}_0$, les éléments a et a' ayant une image commune sont congrus entre eux et doivent avoir les mêmes images, ce qui exige l'égalité des classes $a.\overline{A}_0$ et $a'.\overline{A}_0$. Par ailleurs tout élément de $\overline{A}_1$ étant image d'au moins un autre élément, appartient au moins à une classe.

La condition est *suffisante. Toute classe contient l'élément qui la définit :* par application de la tautologie et de l'hypothèse de la disjonction, je déduis en effet

$$y \in x.\overline{A}_0 \rightarrow y.\overline{A}_0 \subset x.\overline{A}_0 \rightarrow [x.\overline{A}_0, y.\overline{A}_0] \text{ non vide}$$
$$\rightarrow (x.\overline{A}_0 = y.\overline{A}_0) \rightarrow y \in y.\overline{A}_0$$

(pour tout élément y de $\overline{A}_1$).

Il en résulte la *réflexivité* et la *symétrie*

$$(x \in y.\overline{A}_0 = x.\overline{A}_0) \rightarrow x.(\alpha_0).x \qquad (\text{tout } x \text{ de } A_1);$$
$$x.(\alpha_0).y \rightleftharpoons y \in x.\overline{A}_0 = y.\overline{A}_0 \rightleftharpoons y \in y.\overline{A}_0 = x.\overline{A}_0 \rightleftharpoons y.(\alpha_0).x.$$

la *transitivité* est évidente : le produit $\alpha_0 \times \alpha_0$, associé au produit $\overline{A}_0 \times \overline{A}_0 = \overline{A}_0$, est égal à α_0

Lorsque, dans le *s. h. c.* $\overline{A}_1$, le *s. h. c.* $\overline{A}_0$ *définit, des deux côtés, des classes disjointes* (ce qui est équivalent à dire que $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$ sont toutes deux congruences dans $\overline{A}_0$), MM. Drescher et Ore disent que $\overline{A}_0$ est *un sous-hypergroupe réversible de* $\overline{A}_1$ (il l'est alors manifestement dans tout *s. h. c.* inclus dans $\overline{A}_1$ et contenant $\overline{A}_0$).

Dans le vocabulaire employé ci-dessus (n° 12), les congruences $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}'_1$, associées à $\overline{A}_1$ et les congruences $\overline{\alpha}_0$, $\overline{\alpha}'_0$, associées à $\overline{A}_0$, forment des quotients (corrélatifs) de congruences $\overline{\alpha}_1 | \overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0 | \overline{\alpha}'_0$: je dirai, par une extension évidente, que $\overline{A}_1 | \overline{A}_0$ est un *quotient de s. h. c.*; cette notation peut aussi, sans ambiguïté, désigner l'*ensemble quotient* $\overline{A}_1 | (\overline{\alpha}_0)$.

28. *Intersection de sous-hypergroupes clos.* — L'association (biunivoque) de deux congruences corrélatives à un *s. h. c.* (de H) permet d'appliquer immédiatement aux *s. h. c.* des propriétés établies pour les congruences (n^{os} 8 à 11).

L'intersection de deux sous-hypergroupes clos (de H), si elle n'est pas vide, *est un sous-hypergroupe clos*, auquel est associée la conjonction des congruences associées (de chaque côté) aux deux *s. h. c.*

Les congruences $\overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}'$; $\overline{\beta}$ et $\overline{\beta}'$, associées (des deux côtés) respectivement aux *s. h. c.* $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont totales dans ces domaines. Leurs conjonctions $\overline{\mu} = [\overline{\alpha}, \overline{\beta}]$; $\overline{\mu}' = [\overline{\alpha}', \overline{\beta}']$ sont congruences dans l'intersection $\overline{M} = [\overline{A}, \overline{B}]$ et l'admettent pour domaine de totalité (n° 8). L'intersection M est donc un *s. h. c.* auquel $\overline{\mu}$ et $\overline{\mu}'$ sont associées (n° 26). Il est bien entendu possible de vérifier « directement » cette propriété (1), sans passer par l'intermédiaire des congruences; il suffit de rapprocher les raisonnements.

Si les *s. h. c.* de H sont comparés par *inclusion*, *l'intersection* $\overline{M} = [\overline{A}, \overline{B}]$ *est le plus grand sous-hypergroupe clos commun de* $\overline{A}$ et $\overline{B}$: l'ensemble des *s. h. c.* contenus dans $\overline{A}$ et dans $\overline{B}$ est égal à l'ensemble des *s. h. c.* contenus dans $\overline{M}$.

Cet énoncé est équivalent aux propriétés corrélatives $\overline{\mu}$ et $\overline{\mu}'$ d'être les plus fortes antécédentes communes de $\overline{\alpha}$ dans $\overline{A}$, $\overline{\beta}$ dans $\overline{B}$, et de $\overline{\alpha}'$, $\overline{\beta}'$. Comme pour les conjonctions de congruences, ces propriétés s'étendent à l'intersection $\overline{M}$ d'une famille (finie ou infinie) de *s. h. c.* $\overline{A}_i$; c'est encore un *s. h. c.* qui est le plus grand *s. h. c.* commun des $\overline{A}_i$.

Si $\overline{A}_1 | \overline{A}_0$ *est un quotient de s. h. c.* ($\overline{A}_0$ *s. h. c.* réversible dans le *s. h. c.* $\overline{A}_1$), *il en est de même de leurs intersections* $[\overline{A}_1, \overline{B}] | [\overline{A}_0, \overline{B}]$ *avec un même s. h. c.* $\overline{B}$: $[\overline{A}_0, \overline{B}]$ répartit $[\overline{A}_1, \overline{B}]$ en classes disjointes.

(1) C'est naturellement un tel raisonnement direct qu'ont donné MM. Drescher et Ore, M. Krasner a démontré une propriété, en apparence plus générale : l'intersection d'un *s. h. c.* $\overline{A}$ (dans H), avec un sous-hypergroupe B (non nécessairement clos) est un *s. h. c. de* B.

Cette propriété de répartition est évidente directement, elle résulte aussi manifestement des propriétés des congruences : les autocorrespondances $\overline{\alpha}_0$, $\overline{\alpha}'_0$ associées à $\overline{A}_0$ sont congruences (non totales) dans $\overline{A}_1$; les conjonctions $\overline{\mu} = [\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}]$ et $\overline{\mu}' = [\overline{\alpha}'_0, \overline{\beta}']$ sont congruences dans $[\overline{A}_1, \overline{B}]$, où elles sont égales à α_0 et $\overline{\alpha}'_0$ (n° 8). C'est une partie de l'énoncé du n° 17 sur le quotient de conjonctions.

Il est à remarquer que cette propriété ne s'étend plus comme celle des congruences. Si $\overline{A}_0$ et $\overline{B}_0$ sont *s. h. c.* réversibles respectivement dans $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_1$, il n'en est plus nécessairement de même de l'intersection $[\overline{A}_0, \overline{B}_0]$ dans $[\overline{A}_1, \overline{B}_1]$. La conjonction $[\alpha_0, \beta_0]$ est bien congruence dans $[\overline{A}_1, \overline{B}_1]$, mais elle n'est plus nécessairement égale à l'autocorrespondance associée à $[\overline{A}_0, \overline{B}_0]$, dont elle est seulement une conséquente

$$(y \in x.[\overline{A}_0, \overline{B}_0]) \rightarrow (y \in x.\overline{A}_0 \text{ et } y \in x.\overline{B}_0) \rightleftharpoons x.[\alpha_0, \beta_0].y.$$

29. *Produit de sous-hypergroupes clos (permutables).* — *Si*, dans un hypergroupe $\overline{B}_1$ (qui peut être *s. h. c.* de H), *deux sous-hypergroupes clos* $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_0$, à intersection I non vide, *sont permutables et si* $\overline{B}_0$ *est réversible dans* $\overline{B}_1$, *la valeur commune des produits*

$$D_1 = \overline{A}_1.\overline{B}_0 = \overline{B}_0.\overline{A}_1$$

est un sous-hypergroupe clos, dans D_1, auquel sont associés (de chaque côté) les produits (commutatifs) $\overline{\alpha}_1 \times \overline{\beta}_0 = \overline{\beta}_0 \times \overline{\alpha}_1$ et $\overline{\alpha}'_1 \times \overline{\beta}'_0 = \overline{\beta}'_0 \times \overline{\alpha}'_1$ des congruences associées, de chaque côté, à $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_0$.

L'autocorrespondance $\overline{\beta}_0$, associée (à droite) à $\overline{B}_0$, est congruence dans $\overline{B}_1$ et elle y est permutable avec $\overline{\alpha}_1$, associée (à droite) à $\overline{A}_1$ (donc congruence totale dans le domaine clos $\overline{A}_1$). La valeur commune des produits

$$\overline{\delta}_1 = \overline{\alpha}_1 \times \overline{\beta}_0 = \overline{\beta}_0 \times \overline{\alpha}_1$$

est congruence (totale pour un élément *e*, de I) dans le domaine

$$\overline{A}_1.(\overline{\beta}_0) = \overline{A}_1.\overline{B}_0 = \overline{B}_0.\overline{A}_1 = \overline{D}_1$$

(c'est une conséquence des propriétés des nos 9 et 11, en tenant compte de l'existence de l'intersection I de $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_0$), Il en est de même du produit $\overline{\delta}'_1 = \overline{\alpha}'_1 \times \overline{\beta}'_0 = \overline{\beta}'_0 \times \overline{\alpha}'_1$, des congruences (associées à gauche) et $\overline{D}_1$ est bien un *s. h. c.* Il est, bien entendu, toujours possible de donner de ce résultat une démonstration « directe ».

Si les *s. h. c.* sont comparés, dans $\overline{B}_1$, par *inclusion*, $\overline{D}_1$ est *le plus petit sur hypergroupe commun de* $\overline{A}_1$ *et* $\overline{B}_0$: l'ensemble des *s. h. c.* qui contiennent A_1 et $\overline{B}_0$ est égal à l'ensemble des *s. h. c.* qui contiennent $\overline{D}_0$.

C'est une conséquence de la propriété de $\overline{\delta}_1$ et $\overline{\delta}'_1$ d'être les plus faibles conséquences communes de $\overline{\alpha}_1$ dans $\overline{A}_1$, $\overline{\beta}_0$ dans $\overline{D}_1$ et de $\overline{\alpha}'_1$, $\overline{\beta}'_0$. C'est aussi évident directement : tout *s. h. c.* qui contient $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_0$ contient nécessairement les produits de leurs éléments, donc $\overline{D}_1$.

S'il existe un *s. h. c.* $\overline{A}_0$, réversible dans $\overline{A}_1$, et également permutable avec $\overline{B}_0$, la valeur commune des produits

$$\overline{D}_0 = \overline{A}_0 . \overline{B}_0 = \overline{B}_0 . \overline{A}_0$$

est encore un *s. h. c.*, inclus dans $\overline{D}_1$ où il est réversible.

En effet les autocorrespondances $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$, associées (de chaque côté) à $\overline{A}_0$, sont congruences dans $\overline{A}_1$; elles y sont permutables avec $\overline{\beta}_0$, de sorte que les produits

$$\overline{\delta}_0 = \overline{\alpha}_0 \times \overline{\beta}_0 = \overline{\beta}_0 \times \overline{\alpha}_0, \qquad \overline{\delta}'_0 = \overline{\alpha}'_0 \times \overline{\beta}'_0 = \overline{\beta}'_0 \times \overline{\alpha}'_0,$$

associés à $\overline{D}_0$ sont congruences dans $\overline{D}_1$, ce qui est équivalent à la réversibilité de $\overline{D}_0$ dans $\overline{D}_1$.

30. *Quotients correspondants.* — La notion de correspondance (n° 12) s'étend à des quotients de *s. h. c.* :

Deux quotients de s. h. c. $\overline{A}_1 | \overline{A}_0$ et $\overline{B}_1 | \overline{B}_0$ ($\overline{A}_0$ et $\overline{B}_0$ réversibles dans $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_1$) *sont correspondants si*

$$[\overline{A}_1, \overline{B}_0] = [\overline{A}_0, \overline{B}_1]$$

et

$$\overline{A}_1 . \overline{B}_0 = \overline{A}_0 . \overline{B}_1, \qquad \overline{B}_0 . \overline{A}_1 = \overline{B}_1 . \overline{A}_0.$$

Dans la première égalité, la valeur commune des deux membres est un *s. h. c.*, égal d'ailleurs à $[\overline{A}_0, \overline{B}_0]$. Dans les deux autres égalités, les termes ne sont, *a priori*, que des complexes. Cette correspondance est équivalente à celle des quotients de congruences corrélatives associées. D'après la démonstration du n° 13, les ensembles quotients associés

$$\overline{A}_1 | (\overline{\alpha}_0) \quad \text{et} \quad \overline{B}_1 | (\overline{\beta}_0) \quad \text{ou} \quad \overline{A}_1 | \overline{A}_1 \quad \text{et} \quad \overline{B}_1 | \overline{B}_0$$

sont équipotents.

31. *Demi-treillis des complexes.* — Je désigne par $\mathscr{E}$ *l'ensemble des complexes* A (parties non vides) *de l'hypergroupe* H et, par $\mathscr{E}_\alpha$, $\mathscr{E}_{\alpha'}$ l'ensemble des autocorrespondances corrélatives α et α' associées (à droite et à gauche) univoquement aux complexes A. Les familles $\mathscr{E}_\alpha$, $\mathscr{E}_{\alpha'}$ sont des demi-treillis, au sens du n° 14, ainsi que la famille $\mathscr{E}$ (pour laquelle, il faut toutefois remplacer disjonction par réunion); elles vérifient en effet simultanément des conditions d'appartenance 1° et 2° :

1. $\mathscr{E}$ *contient la réunion* A_I des complexes A_i d'une famille $\mathscr{A}$ quelconque de $\mathscr{E}$; les familles $\mathscr{E}_\alpha$ et $\mathscr{E}_{\alpha'}$ contiennent simultanément les disjonctions α_I et α'_I, des autocorrespondances α_i et α'_i, associées respectivement aux complexes A_i de la famille $\mathscr{A}$ et qui constituent les parties correspondantes $\mathscr{A}_\alpha$ et $\mathscr{A}_{\alpha'}$ (de $\mathscr{E}_\alpha$ et $\mathscr{E}_{\alpha'}$). Ces disjonctions sont les plus faibles conséquentes communes de ces parties.

2. *$\mathfrak{E}$ contient le produit* $A_1 . A_2$ de tout couple, et, par suite, de tout système fini de complexes (de H). Simultanément $\mathfrak{E}_\alpha$ et $\mathfrak{E}_{\alpha'}$ contiennent les produits $\alpha_1 \times \alpha_2$ et $\alpha'_1 \times \alpha'_2$ des autocorrespondances associées (n° 23). Ces produits, comme leurs facteurs, admettent l'hypergroupe H comme domaine clos et complet (n° 24).

Si l'intersection de deux complexes [A, B] n'est pas vide, il lui est associé les conjonctions (corrélatives) des autocorrespondances associées (des deux côtés $[\alpha, \beta]$, $[\alpha', \beta']$. Les demi-treillis $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_\alpha$ $\mathfrak{E}_{\alpha'}$ contiennent en plus de la plus faible conséquente commune (de toute famille), la plus forte antécédente commune de deux de leurs éléments, si toutefois elle existe.

32. *Famille de sous-hypergroupes clos permis.* — Dans $\mathfrak{E}$, je considère une famille $\mathfrak{F}$ de *s. h. c.*, que j'appelle *permis*, contenant tous, au moins un même élément *e* (qui sera notamment le scalaire neutre e_0, s'il existe, n° 26) et qui vérifie les deux conditions d'appartenance (analogues à celles du n° 15) :

3. *La famille $\mathfrak{F}$ contient l'intersection* $[\overline{A}, \overline{B}]$ (non vide d'après l'hypothèse) de deux quelconques de ses éléments;

4. *$\mathfrak{F}$ contient le produit de deux de ses éléments*, lorsqu'ils sont contenus dans un même sous-hypergroupe clos, qu'ils y sont *permutables*, et que l'un d'eux y est *réversible*; dans ce cas ce produit est *s. h. c.* (n° 29).

Une telle famille $\mathfrak{F}$ est notamment constituée par l'ensemble de tous les *s. h. c.* de H.

Comme dans le cas des groupes (R. S., 49), il peut être constitué une famille $\mathfrak{F}$ en ne retenant que les *s. h. c.* invariants pour un ensemble « d'endomorphismes » de H; chaque endomorphisme respectant : la qualité de *s. h. c.*, les intersections, les produits et la qualité de réversibilité.

Au lieu des conditions 3 et 4 on pourrait imposer une seule condition plus restrictive :

3' et 4'. $\mathfrak{F}$ contient l'intersection M (non vide) de toute sous-famille $\overline{\mathfrak{A}}$ (finie ou infinie). Cette intersection est le plus grand *s. h. c.* commun des *s. h. c.* de la famille $\overline{\mathfrak{A}}$ (n° 28).

Dans ce cas $\mathfrak{F}$ est un treillis : il contient en effet le plus petit surhypergroupe commun de tout couple $\overline{A}$, $\overline{B}$, de ses éléments : c'est l'intersection de tous les *s. h. c.* qui contiennent à la fois $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et dont l'ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient au moins H. (Les produits définis par la condition 4, appartiennent bien à $\mathfrak{F}$, puisqu'ils sont des plus petits *s. h. c.* communs.)

33. *Famille des congruences associées.* — Les familles $\mathfrak{F}_\alpha$ et $\mathfrak{F}_{\alpha'}$ des congruences (corrélatives), associées *biunivoquement* (n° 28) aux *s. h. c.* de la famille $\mathfrak{F}$ remplissent « simultanément » les conditions 3, 4 et 5 du n° 15.

3. Si $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$, associées au *s. h. c.* $\overline{A}_0$ (de $\mathfrak{F}$), sont congruences (non totales) dans le *s. h. c.* $\overline{A}_1$ (de $\mathfrak{F}$) et si $\overline{\beta}$, $\overline{\beta}'$ sont associées au *s. h. c.* $\overline{B}$ (de $\mathfrak{F}$), les intersections $[\overline{A}_0, \overline{B}]$ et $[\overline{A}_1, \overline{B}]$ sont dans $\mathfrak{F}$; les *conjonctions* $[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}]$ *et* $[\overline{\alpha}'_0, \overline{\beta}']$, associées à $[\overline{A}_0, \overline{B}]$ et congruences dans $[\overline{A}_1, \overline{B}]$ *appartiennent bien à* $\mathfrak{F}_\alpha$ *et* $\mathfrak{F}_{\alpha'}$.

4. Si $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$, associées à $\overline{A}_0$ et congruences dans $\overline{A}_1$ d'une part, $\overline{\beta}_0$ et $\overline{\beta}'_0$, associées à $\overline{B}_0$ et congruences dans $\overline{B}_1$, qui contient $\overline{B}_0$ et $\overline{A}_1$, d'autre part, sont permutables dans $\overline{B}_1$, leur commutativité est équivalente à celle de $\overline{A}_0$ et $\overline{B}_0$; *leurs produits* $\overline{\delta}$ et $\overline{\delta}'$ sont associées à $\overline{A}_0$, $\overline{B}_0$ et sont congruences dans $\overline{A}_1$, B_0 (qui est dans $\mathfrak{F}$) ; ils *appartiennent donc à* $\mathfrak{F}_\alpha$ *et* $\mathfrak{F}_{\alpha'}$.

5. La dernière condition peut être établie par un raisonnement légèrement différent de celui des groupes (*R. S.*, 49). Je considère une congruence $\overline{\beta}_0$, dans un *s. h. c.* $\overline{B}_1$, associée (à droite) au *s, h. c.* $\overline{B}_0$ (inclus dans $\overline{B}_1$) et une autocorrespondance α, associée à un complexe A de $\overline{B}_1$. Tout domaine clos D de $\alpha \times \overline{B}_0$ contient $A.\overline{B}_0$, qui est donc inclus dans $\overline{B}_1$. Or $\overline{B}_1$ et, par suite $A.\overline{B}_0$ est réparti (par $\overline{\beta}_0$) en classes disjointes de la forme $d_i.\overline{B}_0$ (où d_i est un élément de $A.\overline{B}_0$). Mais une classe de $A.B_0$ contient au moins un élément d'un complexe $a_i.B_0$; c'est aussi une classe, qui, en raison de la disjonction, est alors égale à la précédente. Il en résulte qu'à tout élément d_i de $A.\overline{B}_0$ correspond au moins un élément a_i de A, tel que

$$d_i.\overline{B}_0 = a_i.\overline{B}_0, \qquad \text{et} \qquad \delta_i \times \overline{\beta}_0 = \alpha_i \times \overline{\beta}_0 ;$$

δ_i et α_i étant les autocorrespondances associées aux éléments d_i et a_i. L'égalité s'étend à une antécédente $\overline{\delta}_i$, quelconque de $A.\overline{B}_0$ (associée à un complexe d'éléments d_i) et à l'autocorrespondance α_i associée aux éléments a_i, correspondant aux d_i, et formant un complexe de A, de sorte que α_i est antécédente de α.

34. *Invariance.* — Je dis qu'*un s. h. c.* $\overline{B}_0$, réversible dans $\overline{B}_1$, *est invariant*, ou distingué, *relativement à un s. h. c.* $\overline{A}$, lorsque les congruences $\overline{\beta}$ et $\overline{\beta}'$, associées à $\overline{B}_0$, sont respectivement invariantes relativement aux congruences $\overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}'$, associées à $\overline{A}$

$$(1) \qquad (\gamma \to \overline{\alpha}) \to (\gamma \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma \text{ et } \gamma' \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma').$$

Cette condition est équivalente à la *commutativité de* $\overline{B}_0$ *avec tout élément de* $\overline{A}$, et par suite avec tout complexe de A

$$(2) \qquad c \in \overline{A} \to c.\overline{B}_0 = \overline{B}_0.c \qquad \text{ou} \qquad (C \subset \overline{A} \to C.\overline{B}_0 = \overline{B}_0.C).$$

La condition (2) entraîne (1), car $\overline{A}$ étant *s. h. c.*, tout couple γ, γ' d'antécédentes corrélatives de $\overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}'$ est associé à un complexe C de $\overline{A}$ et

$$C.\overline{B}_0 = \overline{B}_0.C \rightarrow (\gamma \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma \quad \text{et} \quad \gamma' \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma').$$

Réciproquement les égalités

$$\gamma \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma \quad \text{et} \quad \gamma' \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma'$$

entraînent

$$x.(C.\overline{B}_0) = x.(\overline{B}_0.C) \quad \text{et} \quad (C.\overline{B}_0).x = (\overline{B}_0.C).x \quad (\text{tout } x \in \overline{B}_1).$$

Ceci a lieu en particulier pour tout élément x de $\overline{B}_0$, de sorte que

$$\overline{B}_0.C.\overline{B}_0 = \overline{B}_0.C \quad \text{et} \quad C.\overline{B}_0 = \overline{B}_0.C.\overline{B}_0;$$

d'où résulte l'égalité (2).

En utilisant toujours le vocabulaire des congruences (n° 16), je dis qu'un *quotient de s. h. c.* $\overline{A}_1 \mid \overline{A}_0$ est *normal*, lorsque $\overline{A}_0$ est invariant relativement à $\overline{A}_1$; ce qui est équivalent à la normalité des quotients des congruences corrélatives associées $\overline{\alpha}_1 \mid \overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0 \mid \overline{\alpha}'_0$.

Il est équivalent de dire que *les classes de répartition de* $\overline{A}_1$ *par* $\overline{A}_0$, *à droite et à gauche* (ou par $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$) *sont les mêmes*

$$a \in \overline{A}_1 \rightarrow a.\overline{A}_0 = \overline{A}_0.a$$

[ce n'est qu'une expression de la condition (2)]. L'analogie avec la condition d'invariance d'un sous-groupe est évidente.

L'ensemble quotient $\overline{A}_1 \mid \overline{A}_0$ est lui-même un *hypergroupe quotient*, la composition de deux classes étant définie par la composition de deux de leurs éléments quelconques, puisque, en raison de la propriété précédente

$$(a_i.\overline{A}_0).(a_j.\overline{A}'_0) = (a_i.a_j).\overline{A}_0 \qquad (a_i.a_j \in \overline{A}_1)$$

(le produit de deux classes est un complexe de classes). Cet ensemble de classes vérifie bien en outre la propriété de neutralité des hypergroupes (condition 1 du n° 24), car $a_i.\overline{A}_0$ n'étant qu'un complexe particulier de $\overline{A}_1$

$$(a_i.\overline{A}_0).\overline{A}_1 = \overline{A}_1.(a_i.\overline{A}_0) = \overline{A}_1.$$

35. *Quotient de congruences et de produits.* — La normalité d'un quotient de deux *s. h. c.* étant équivalente à celle des quotients de congruences corrélatives, les propriétés établies pour les congruences (n^{os} 17 et 18) sont encore vraies; je me contente de les énoncer :

1. *Si un quotient de s. h. c.* $\overline{A}_1 \mid \overline{A}_0$ *est normal, il en est de même du quotient de leurs intersections* (supposées non vides) *avec un même s. h. c.* $\overline{B}$: $[\overline{A}_1, \overline{B}] \mid [\overline{A}_0, \overline{B}]$.

2. *Si un quotient de s. h. c.* $\overline{A}_1 \mid \overline{A}_0$ *est normal et si* $\overline{B}_0$ *est un s. h. c., réversible dans un s. h. c.* $\overline{B}_1$ *et invariant relativement à* $\overline{A}_1$ (et par suite à $\overline{A}_0$), *les produits*

$$\overline{D}_1 = \overline{A}_1 . \overline{B}_0 = \overline{B}_0 . \overline{A}_1, \qquad \overline{D}_0 = \overline{A}_0 . \overline{B}_0 = \overline{B}_0 . \overline{A}_0$$

constituent un quotient de s. h. c. (n° 29) *qui est encore normal.*

36. *Théorèmes de Schreier et de Jordan-Hölder.* — J'énonce de même, dans le vocabulaire de la théorie des hypergroupes, les théorèmes démontrés ci-dessus (n^{os} 20 et 21), pour des familles de congruences permises. Je les complète en remarquant que l'équipotence étant faite entre les ensembles quotients par une communauté de certains représentants, elle conserve l'opération de l'hypergroupe, de sorte que l'équipotence de ces ensembles est un isomorphisme des hypergroupes quotients.

Dans un hypergroupe H, où existe une famille $\mathfrak{F}$ (n° 32) de sous-hypergroupes clos permis, j'appelle *suite de composition normale*, un système, ordonné et numéroté, de *s. h. c.* de $\mathfrak{F}$, *dont chaque terme* $\overline{A}_i$ *est réversible et invariant dans le terme suivant* $\overline{A}_{i+1}$ (deux termes successifs forment un *quotient normal*). Les qualificatifs « *propre* » et « *maximale* » ont la même signification.

Si deux suites de composition normales ont les mêmes termes extrêmes, on peut leur intercaler des termes, de façon à former deux nouvelles suites normales (de s. h. c. de $\mathfrak{F}$), dont les hypergroupes quotients sont isomorphes deux à deux.

Si deux suites de composition normales, de mêmes termes extrêmes sont maximales, elles ont même longueur, et leurs hypergrouges quotients sont isomorphes deux à deux.